

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren, fortgeführt
durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E.
Wiedemann, P. Drude, W. Wier, M. Planck

Der ganzen Reihe 437. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, A. SOMMERFELD, W. WEIZEL

Herausgegeben von

E. GRÜNEISEN
Marburg/L.

F. MÖGLICH
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionssechluß am 3. Mai 1948

Inhalt

	Seite
O. Hachenberg, Berlin-Buch: Umlenkung eines Elektronenstrahles unter Beibehaltung der punktförmigen Abbildung der Kathodenaustrittsblende auf den Leuchtschirm. (Mit 10 Abbildungen)	225
E. Lau und W. Leo, Berlin-Karow und Weida i. Thür.: Über die Augenempfindlichkeit an der ultraroten Grenze. (Mit 7 Abbildungen)	242
Georg Wendt, Château de Corbeville s/Orsay: Zur Verbreiterung eines elektronenoptischen Strahlenbündels unter Einwirkung der Eigenladung. (Mit 3 Abbildungen)	256
Max Kornetzki, Heidenheim-Mergelstetten: Die Spannungs-Dehnungskurve ferromagnetischer Werkstoffe (Magnetomechanische Hystereseschleife). (Mit 1 Abbildung)	265
P. Kunze und Liselotte Hohl, Rostock: Über den Einfluß elektrostatischer Felder auf Licht nach J. Stark. (Mit 1 Abbildung)	270
Erwin Hardtwig, Stuttgart-Ost: Über Differentialgleichungen mit Invarianz gegenüber der Lorentzgruppe	273
R. Seeliger, Greifswald: Bemerkung zu den Trägerbilanzgleichungen der Ionosphäre. (Mit 2 Abbildungen)	286
Hartmut Kallmann und Max Päsler, Berlin-Charlottenburg und Berlin-Dahlem: Neue Behandlungs- und Darstellungsmethode wellenmechanischer Probleme	292
Hartmut Kallmann und Max Päsler, Berlin-Charlottenburg und Berlin-Dahlem: Allgemeine Behandlung des H-Atoms mit beliebigen Anfangsbedingungen mittels der Laplace-Transformation und deren physikalische Bedeutung. (Mitteilung II zu „Eine neue Behandlungs- und Darstellungsmethode wellenmechanischer Probleme“)	305

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Veröffentlichung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechtes der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn *Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grüneisen*, (16) Marburg/L., Mainzer Gasse 33, oder Herrn *Prof. Dr. F. Möglich*, (1) Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die Zeichnungen sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den Zitate wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Bezugspreis je Band zu 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden, RM. 34.—. Porto: Inland RM. 1.20. Preis eines Einzelheftes RM. 5.20, eines Doppelheftes RM. 10.40. Die Zeitschrift kann durch jede Buchhandlung, in Ausnahmefällen auch durch den Verlag bezogen werden.

Umlenkung eines Elektronenstrahles unter Beibehaltung der punktförmigen Abbildung der Kathodenaustrittsblende auf den Leuchtschirm

Von O. Hachenberg

(Mit 10 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es werden die Möglichkeiten diskutiert, einen Elektronenstrahl um einen größeren Winkel umzulenken, und dabei die punktförmige Abbildung der Kathodenaustrittsblende auf den Leuchtschirm zu erhalten.

Für verschiedene einfachsymmetrische, elektrostatische Umlenkkondensatoren werden aus den Bewegungsgleichungen der Elektronen die optischen Eigenschaften abgeleitet. Diese Umlenkensysteme üben alle neben der Umlenkung auch eine Linsenwirkung auf den Elektronenstrahl aus, die sogar bei den meisten Systemen in verschiedenen Strahlflächen verschieden ist.

Durch Zulassung von astigmatischen Zwischenbildern ist es bei allen untersuchten Systemen möglich, unter gewissen Bedingungen nach der Umlenkung eine punktförmige Abbildung zu erreichen.

An Versuchsröhren wurde die Güte der Abbildungen untersucht.

Die elektronenoptische Abbildung entlang beliebig gekrümmter Achsen, die eine Bereicherung und Vervollständigung der technischen Möglichkeiten der Elektronenoptik bringt, wurde ausführlich behandelt in den Arbeiten von M. Cotte¹⁾ und G. Wendt²⁾. Beide Arbeiten behandeln die übliche optische Abbildung, durch die die Gegenstandsebene ähnlich in die Bildebene übergeführt wird. Verzichtet man auf die Ähnlichkeit zwischen Gegenstandsebene und Bildebene und läßt man in der Bildebene in zwei senkrechten Achsen verschiedene Vergrößerungsfaktoren zu, so kommt man gegenüber den üblichen optischen Anordnungen zu ungewöhnlichen Systemen, denen aber elektronenoptisch doch gewisse Bedeutung zukommt.

So führt das Bestreben, die Baulänge von Bildschreibröhren oder Oszillographenröhren durch Einführung eines geknickten Strahlenganges zu verkürzen (vgl. Abb. 1), zu der Aufgabe, die punktförmige Kathodenaustrittsblende nach der Umlenkung punktförmig auf den Leuchtschirm abzubilden. Eine Bedingung über die Ähnlichkeit zwischen Gegenstandsebene und Bildebene braucht dabei nicht direkt erfüllt zu werden.

¹⁾ M. Cotte, C. R. Acad. Sci. Paris **205**, 974 (1937).

²⁾ G. Wendt, Z. Physik **120**, 720 (1943).

Auf ähnliche elektronenoptische Systeme wird man geführt, wenn man für Elektronenschalter oder Kreisoszillograph den Elektronenstrahl um 90° umlenkt und das Bild der Kathodenaustrittsblende auf einem Zylindermantel umlaufen läßt (vgl. Abb. 2). Systeme dieser Art gestatten bei gedrängter Bauart Kreise großen Radius schreiben zu lassen. Für den Kathodenstrahlenschalter ergibt sich die Möglichkeit, eine größere Anzahl von Kontakten bequem auf dem Zylindermantel anordnen zu können.

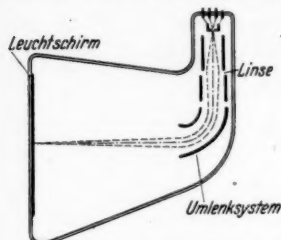


Abb. 1. Bildschreibröhre mit geknicktem Strahlengang

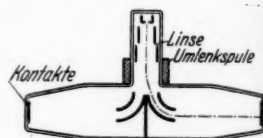


Abb. 2. Kathodenstrahlenschalter mit zylinderförmiger Anordnung der Kontakte

Die elektronenoptischen Systeme, die untersucht werden, setzen sich zusammen aus einer Sammellinse und dem Umlenkensystem. Die Umlenkung soll nur durch elektrische Felder vorgenommen werden; von diesen werden auch nur diejenigen zu einer näheren Betrachtung herangezogen, die zwischen einfachen Rotationsflächen bestehen.

I. Die Umlenkung im elektrischen Feld zwischen einfach symmetrischen Rotationsflächen

Wir behandeln die Umlenkung in elektrischen Feldern zwischen Plattenpaaren, die aus Rotationsflächen von konzentrischen Kreisbogenstücken abgeschnitten sind.

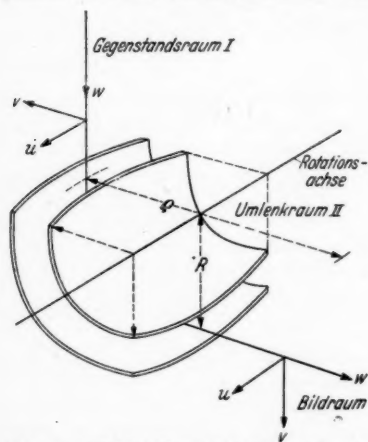


Abb. 3. Elektrisches Umlenkensystem aus Rotationsflächen, die bezüglich der Umlenkebene symmetrisch sind. [Die Krümmungen q und R haben entgegengesetztes Vorzeichen ($q < 0$)]

Die Umlenkung des Hauptstrahls erfolgt in einer Ebene entlang einem Bogenstück eines Rotationskreises. Die Platten und damit auch das elektrische Feld zwischen diesen sollen zur Bahnebene symmetrisch sein. Es stehen also zunächst Systeme entsprechend den Abb. 3 und 4 zur Behandlung, Systeme, deren Platten eine gewisse positive (Abb. 3) oder negative (Abb. 4) Krümmung gegen die Rotationsachse haben. Die abbildenden Eigenschaften derartiger Systeme werden besonders bei schwacher Krümmung der Platten gegen die Rotationsachse in der Richtung der Umlenkung denen der Zylinderkondensatoren ähnlich sein, jedoch tritt auch in der Richtung senkrecht zur Bahnebene eine Komponente des elektrischen Feldes auf, so daß jetzt auch eine Beeinflussung

des Strahles in dieser Richtung stattfinden muß. Die Änderung der Abbildungseigenschaften der Systeme mit der Größe und dem Vorzeichen der Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Platten wird näher untersucht.

Zunächst seien die geometrisch-optischen Konstanten derartiger Umlenkfelder bestimmt. Zu diesem Zweck legen wir durch die Hauptachse des Strahlenbündels die w -Achse eines Koordinatensystems (u, v, w) , das im Gegenstandsraum I und im Bildraum III kartesisch ist. In dem Umlenkraum II folgt die w -Achse dem Kreisbogen des Hauptstrahles (optische Achse); wir wählen hier Zylinderkoordinaten und setzen $w = R \cdot \Theta$ und $v = r - R$.

Die an den Umlenkelektroden herrschenden Spannungen sind so gewählt, daß der in der Mitte zwischen beiden Elektroden in das Umlenkfeld eintretende Elektronenstrahl keine Geschwindigkeitsveränderung erfährt. Die Elektronenbewegung erfolgt im gesamten Gerät in der Nähe der Hauptachse, insbesondere im Umlenkcondensator spielt sie sich in der Nähe des Kreisbogens $w = R \cdot \Theta$ ab. Es ist daher notwendig, die elektrischen Kräfte um diesen Kreisbogen herum zu kennen. Zu diesem Zweck wird das elektrische Potentialfeld innerhalb der Umlenkelektroden durch eine Potenzreihenentwicklung nach den Koordinaten u und v dargestellt. Infolge der aus den Abb. 3 und 4 leicht zu entnehmenden Symmetriebedingungen $\varphi(u, v) = \varphi(-u, v)$ lautet die Entwicklung:

$$\varphi = a_{00} + a_{01}v + a_{02}v^2 + a_{20}u^2 + \dots \quad (1)$$

Denken wir uns die Entwicklungskoeffizienten $a_{m,n}$ als Funktionen von w , so ist durch (1) das Potential innerhalb des gesamten Umlenkraumes gegeben. Wie sich weiter unten zeigen wird, ist die Potenzreihenentwicklung soweit angeschrieben, daß sie zur Ableitung der optischen Gesetzmäßigkeiten (Brennweite, Hauptebene, Vergrößerung) im Rahmen der Gaußschen Dioptrik genügt. Da das in (1) angeschriebene Potential der Laplaceschen Potentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ genügen muß, sind die Entwicklungskoeffizienten $a_{m,n}$ nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Bedingungs-
gleichung

$$2a_{02} + \frac{a_{01}}{R} + a''_{00} + 2a_{20} = 0 \quad (2)$$

miteinander verknüpft; die Striche bedeuten Differentiationen nach der Koordinate w .

Vernachlässigen wir den Einfluß der am Anfang und Ende des Umlenkfeldes sich ausbildenden Streufelder auf die Elektronenbewegung — diese Vernachlässigung ist wegen des langen Umlenk winkels und des relativ geringen Abstandes der

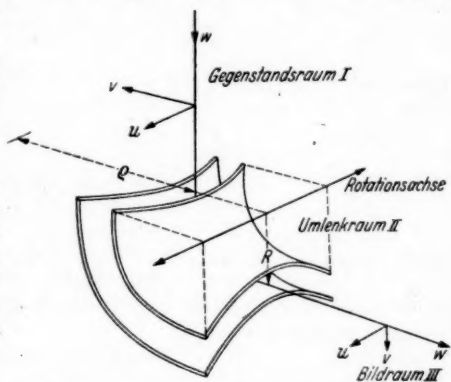


Abb. 4. Elektrisches Umlenkensystem aus Rotationsflächen, die bezüglich der Umlenkebene symmetrisch sind. [Die Krümmungen ϱ und R haben gleiches Vorzeichen ($\varrho > 0$)]

Ablenkelektroden im Rahmen unserer hier betriebenen Näherungsrechnung sicherlich erlaubt —, dann können wir folgende vereinfachenden Annahmen machen: der Raum vor und nach den Umlenkelektroden, also Gegenstands- und Bildraum sind feldfrei; innerhalb des Umlenkfeldes sind die Koeffizienten $a_{m,n}$ von w unabhängig, weshalb auch a''_{00} in (2) verschwindet. Längs der Kreislinie $R \cdot \Theta$ ist also die Feldstärke konstant. Fordern wir nun noch, daß ein Elektron, welches in der Mitte zwischen den beiden Elektroden in das ablenkende Feld eintritt, bei seinem weiteren Lauf der Kreislinie $R \cdot \Theta$ folgen soll, dann muß offenbar für dieses die Zentrifugalkraft $m v^2/R$ entgegengesetzt gleich sein der auf es wirkenden elektrischen Kraft $-e E_v$:

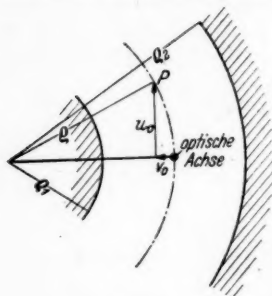


Abb. 5.

Schnitt durch Umlenkungssystem

$a_{00} = \text{const}$ läßt sich leicht mit Hilfe elementarer geometrischer Beziehungen folgende Beziehung ableiten:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = e \cdot E_v.$$

$$\text{Da } \frac{m}{2} \cdot v^2 = e \cdot a_{00} \text{ und andererseits}$$

$$E_v = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -a_{01},$$

erhält man

$$a_{01} = -\frac{2a_{00}}{R}.$$

Die beiden Koeffizienten a_{02} und a_{20} lassen sich ebenfalls auf a_{00} zurückführen, wie sich sogleich zeigen wird.

Wir betrachten zu diesem Zweck Abb. 5. Für den Punkt $P(u_0, v_0)$ der Äquipotentialfläche mit Hilfe elementarer geometrischer Beziehungen

$$u_0^2 + v_0^2 = 2\rho v_0,$$

wobei ρ der (konstante) Krümmungsradius der betrachteten Äquipotentialfläche ist. Er ergibt sich beispielsweise in dem betrachteten Falle aus den Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 der Umlenkelektroden zu $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$.

Unter Verwendung von (1) erhalten wir für das Potential im Punkte P

$$\varphi_P = a_{00} = a_{00} - \frac{2a_{00}}{R} v_0 + a_{02} v_0^2 + a_{20} (2\rho v_0 - v_0^2).$$

Da die linear mit v_0 behafteten Terme für sich verschwinden müssen, erhalten wir direkt:

$$a_{20} = \frac{a_{00}}{R \cdot \rho}. \quad (4)$$

Endlich läßt sich auch a_{02} unter Verwendung der für a_{01} und a_{20} erhaltenen Resultate aus (2) gewinnen (man denke daran, daß $a''_{00} = 0$):

$$a_{02} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R \cdot \rho}. \quad (5)$$

Damit lautet die in (1) allgemein angesetzte Potenzreihenentwicklung im Falle des betrachteten Umlenkfeldes

$$\varphi = U \left[1 - \frac{2}{R} v + \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R \cdot \rho} \right) v^2 + \frac{1}{R \cdot \rho} u^2 + \dots \right], \quad (6)$$

wobei a_{00} durch U ersetzt ist; U bedeutet die Voltgeschwindigkeit, die das Elektron bei seinem Eintritt in das Umlenkkfeld besitzt, d. h. U ist mit der Anodenspannung des Gerätes identisch.

Das nächste Ziel ist die Ableitung der Bewegungsgleichungen; diese erhalten wir über die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. Die Ableitung ist die gleiche, wie sie schon von H. Marschall³⁾ durchgeführt wurde; die dazu notwendigen Zwischenrechnungen wollen wir uns ersparen und das Resultat dort entnehmen. Unter Berücksichtigung unserer in (6) gefundenen Entwicklungskoeffizienten erhalten wir aus den Gleichungen (15) und (16) der angegebenen Arbeit folgende beiden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} u'' - \frac{1}{R \cdot \varrho} u &= 0 \\ v'' + \left(\frac{2}{R^2} + \frac{1}{R \cdot \varrho} \right) v &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Bewegungsgleichungen gestatten die wichtigsten optischen Eigenschaften der einfachsymmetrischen Umlenkensysteme zu erkennen. Ist in den Differentialgleichungen (7) der Koeffizient von u bzw. v positiv, so ist die allgemeine Lösung — die Bahngleichung — eine Summe zweier trigonometrischer Funktionen. Die Lösung ist periodisch, die von einem Achsenpunkt ausgehenden Bahnkurven kehren wieder an einer zweiten Stelle zur Achse zurück. Das Feld hat neben der Umlenkung auch die Wirkung einer elektrischen Sammellinse. Ist dagegen in (7) der Koeffizient von u bzw. v negativ, so setzt sich die allgemeine Lösung aus einem Hyperbolicus und einem Hyperbolicus zusammen. Der Achsenabstand der von einem Punkt der Hauptachse ausgehenden Bahnkurven nimmt letzten Endes monoton zu. Das System übt neben der Umlenkung eine zerstreue Wirkung auf den Elektronenstrahl aus. Die Differentialgleichungen (7) liefern eine Handhabe, die optischen Eigenschaften der verschiedenen Systeme zu erkennen und danach eine natürliche Einteilung der Systeme in Gruppen vornehmen zu können, die nacheinander zu besprechen sind.

1. Der Zylinderkondensator mit $\varrho = \pm \infty$

Wird der Krümmungsradius ϱ sehr groß, so gehen die behandelten Systeme in den Zylinderkondensator mit dem Bahnradius R über. Die Differentialgleichung (7) lautet dann:

$$\begin{aligned} u'' &= 0 \\ v'' + \frac{2}{R^2} \cdot v &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

und die dazugehörigen Bahngleichungen:

$$\begin{aligned} u &= A w + B \\ v &= C \cdot \sin \frac{\sqrt{2}}{R} \cdot w + D \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{R} \cdot w. \end{aligned} \quad (9)$$

Der Elektronenstrahl bleibt in der u -Richtung unbeeinflusst, während er in der Umlenkrichtung v zusätzlich fokussiert wird. Aus der Bahngleichung für v leitet

³⁾ H. Marschall, Physik. Z. 45, 1 (1944).

sich die bekannte Brennweitenformel für den Zylinderkondensator ab:

$$f = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin \sqrt{2} \Theta} \quad (10)$$

und der Abstand der Hauptebene von der Eintritts- bzw. der Austrittsfläche des Umlenkfeldes:

$$h_g = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Theta}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Sowohl Brennweite als auch Lage der Hauptebene sind nur von den geometrischen Abmessungen des Kondensators abhängig und nicht wie bei den üblichen elektrischen Linsen auch von den angelegten Spannungen.

2. Systeme mit $-\infty < \varrho < -\frac{R}{2}$

An den Zylinderkondensator schließen sich die Systeme an mit großen ϱ . Von diesen sollen zunächst diejenigen besprochen werden, bei denen ϱ negativ ist. Es handelt sich also um Systeme ähnlich der Abb. 4. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1}{R \cdot \varrho} \cdot u &= 0 \\ v'' + \left[\frac{2}{R^2} - \frac{1}{R \cdot \varrho} \right] \cdot v &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

diese haben die allgemeinen Lösungen:

$$\begin{aligned} u &= A \cdot \sin \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w + B \cdot \cos \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w \\ v &= C \cdot \sin \sqrt{\frac{2}{R^2} - \frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w + D \cdot \cos \sqrt{\frac{2}{R^2} - \frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Bahngleichungen (13) sind trigonometrische Funktionen; die behandelten Systeme haben außer der Umlenkung in den beiden Koordinaten u und v die Wirkung einer elektrischen Sammellinse. Lassen wir ein paralleles Strahlenbündel bei $w = 0$ in ein derartiges Umlenkfeld eintreten, so muß für dieses Strahlenbündel in den Bahngleichungen $\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)_0 = 0$ sein; mithin müssen die Integrationskonstanten $A = C = 0$ sein. Das parallele Strahlenbündel wird dann an einer Stelle w_b zu einem Bildpunkt vereinigt, wenn für diese Stelle sowohl u als auch v gleich null werden. Für den Fall, daß der Bildpunkt in dem Umlenk-system selbst liegt, wird das Verhalten der Systeme offensichtlich. Für die Abszisse w_b des Bildpunktes müssen dann die Argumente des Kosinus in (13a und b) Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ sein. Das ist auf verschiedene Weise möglich. Die Argumente des Kosinus können gleich sein (Kugellkondensator), oder sie unterscheiden sich um ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$.

a) im Kugulkondensator mit $\varrho = R$ gilt daher für die Lage des Bildpunktes:

$$\sqrt{\frac{2}{R^2} - \frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w = \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w = \frac{2n+1}{2} \pi. \quad (14)$$

Die Bahnkurven in der u - und v -Ebene sind gleich, das Strahlenbüschel ist in bezug auf die w -Achse homozentrisch. Die Linsenwirkung entspricht der üblichen optischen Abbildung mit punktwise ähnlicher Abbildung der Gegenstandsebene auf die Bildebene. Die geometrisch-optischen Eigenschaften des Kugulkondensators sind im übrigen bekannt und brauchen hier nicht weiter behandelt zu werden.

Die Brennweite des Kugulkondensators vom Umlenkwinkel Θ ist

$$f = \frac{R}{\sin \Theta}. \quad (15)$$

Der Abstand der gegenstandsseitigen Hauptebene von der Strahleintrittsebene bzw. der bildseitigen von der Strahlaustrittsebene ist:

$$h_g = R \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta. \quad (16)$$

b) Das parallele Strahlenbüschel kann in den behandelten Systemen auch zu einem Bildpunkt vereinigt werden, wenn man in einer der Koordinaten u oder v

einen oder mehrere Bildpunkte mehr zuläßt als in der anderen (vgl. Abb. 6). Die u -Komponente der Bahngleichungen des einfallenden Strahlenbüschels hat zunächst an der Stelle w_a einen Nulldurchgang, während die v -Komponente an der Stelle einen endlichen Achsenabstand beibehält. Das parallele Strahlenbündel wird also hier zu einem strichförmigen Bild entsprechend einem Bild bei einer Zylinderlinse zusammengezogen. Erst später bei dem Punkt w_b gehen beide Komponenten u und v der Bahngleichung durch null und bilden einen vollen Bildpunkt des Strahlenbündels. Dieses ist von dem Bildpunkt w_b aus gesehen nicht mehr homozentrisch zur w -Achse. Auch die punktwise ähnliche Abbildung der Gegenstandsebene auf die Bildebene wird in dem Falle nicht erhalten bleiben. Es wird vielmehr die Vergrößerung in der u -Richtung von der in der v -Richtung verschieden sein.

Die Lage des Bildpunktes in Systemen mit einem oder mehreren strichförmigen Zwischenbildern ist bestimmt durch:

$$w \cdot \sqrt{\frac{1}{R \varrho}} = \frac{2m+1}{2} \cdot \pi$$

$$w \cdot \sqrt{\frac{2}{R^2} - \frac{1}{R \varrho}} = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi. \quad (17)$$

$$m \neq n$$

Die Bedingungen können nur erfüllt werden für $R \neq \varrho$, und zwar ist $\varrho > R$, wenn $m > n$ ist oder umgekehrt. Die Systeme $\varrho > R$ sind dem Zylinderkonden-

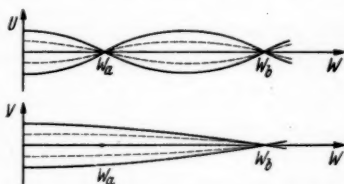


Abb. 6. Ein parallel in das Umlenk-system 2b einfallendes Strahlenbündel.

a) in der uw -Strahlebene
b) in der vw -Strahlebene

sator ähnlich, sie haben schwache Krümmung in der Richtung der Zylinderachse. Dagegen sind die Systeme mit $\varrho < R$ mehr und mehr den Ringkondensatoren verwandt.

Betrachten wir schließlich den konkreten Fall $m = 0$; $n = 1$, so muß:

$$\sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{R^2} - \frac{1}{R \cdot \varrho}}.$$

Setzt man $\varrho = \alpha R$, so wird $\alpha = 5$. Der Krümmungsradius ist fünfmal größer als der Bahnradius R zu wählen. Mit $\varrho = 5 \cdot R$ ergibt sich aber die Lage des Bildpunktes zu $\frac{w}{R} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \pi$; der erste Bildpunkt ist nach einer Umlenkung von mehr als 180° möglich. Vertauscht man n und m , so erhält man ein entsprechendes Resultat.

Die Umlenkung unter Beibehaltung einer punktförmigen Abbildung und bei Verwendung eines strichförmigen astigmatischen Zwischenbildes in einer Komponente ist nur für große Umlenkwinkel möglich. Sie ist daher meist nicht von praktischem Interesse.

3. Das System mit $\varrho = -\frac{R}{2}$ (ein dem Zylinderkondensator analoger Fall)

Die Gruppe 2 der eben behandelten Systeme mit $-\infty < \varrho < -\frac{R}{2}$ wurde nach der Seite $\varrho = \infty$ durch den Zylinderkondensator abgegrenzt. An der anderen Begrenzung dieser Gruppe steht ein System mit $\varrho = -\frac{R}{2}$, das in seinem elektronenoptischen Verhalten dem Zylinderkondensator völlig analog ist. Setzen wir in (7) $\varrho = -\frac{R}{2}$, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

$$\begin{aligned} u'' + \frac{2}{R^2} \cdot u &= 0 \\ v'' &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Und die Bahngleichungen lauten:

$$\begin{aligned} u &= A \cdot \sin \frac{\sqrt{2}}{R} \cdot w + B \cdot \cos \frac{\sqrt{2}}{R} \cdot w \\ v &= C \cdot w + D. \end{aligned} \quad (19)$$

Der Elektronenstrahl wird in der v, w -Ebene umgelenkt, ohne daß er in dieser Ebene eine weitere optische Beeinflussung erfährt. Dagegen übt das System in der u -Richtung, senkrecht zur Umlenkebene, jetzt die Wirkung einer Sammellinse aus.

Vergleicht man die Bewegungsgleichungen mit denen des Zylinderkondensators (8), so findet man, abgesehen davon, daß die Koordinaten u und v vertauscht sind, volle Analogie. Der Zylinderkondensator läßt den Strahl in der Richtung senkrecht zur Umlenkebene unbeeinflusst, und in der Umlenkebene hat er eine Sammellinseneinwirkung mit einer Brennweite entsprechend Gleichung (10). Während das vorliegende System in der Umlenkebene den Strahl unbeeinflusst läßt, und in der Richtung senkrecht zur Umlenkebene eine Sammellinseneinwirkung ausübt, deren

optische Konstanten (Brennweite und Lage der Hauptebene) wegen der gleichlautenden Bahngleichungen aus (10) und (11) übernommen werden können.

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin \sqrt{\frac{1}{2}} \Theta} \\ h_u &= \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Theta}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

4. Das System mit $-\frac{R}{2} < \varrho < 0$

Wird der Krümmungsradius ϱ klein gegen den Bahnradius R , so erhält das Umlenkensystem ausgesprochen den Charakter eines Ringkondensators. Ist dabei ϱ negativ, so wird $\frac{1}{R \cdot \varrho} > \frac{2}{R^2}$ und in der Bewegungsgleichung für die v -Komponente wird der Koeffizient von v negativ. Die Lösungen der Bahngleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} u &= A \cdot \sin \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w + B \cdot \cos \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w \\ v &= C \cdot \sin \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho} - \frac{1}{R^2}} \cdot w + D \cdot \cos \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho} - \frac{1}{R^2}} \cdot w. \end{aligned} \quad (21)$$

Während das System in der uw -Ebene die Eigenschaft einer Sammellinse beibehält, wird jetzt der Elektronenstrahl in der Umlenkebene zusätzlich divergent gemacht. Die optischen Konstanten werden gemeinsam mit der folgenden Gruppe von Systemen, die ein ähnliches Verhalten zeigen, behandelt.

5. Die Systeme mit positiven ϱ ($\varrho > 0$)

Es bleibt schließlich die Gruppe der Systeme entsprechend der Abb. 4 mit beliebigem Krümmungsradius $\varrho > 0$ zu besprechen. Die Bewegungsgleichungen haben in dem Falle die ursprünglich abgeleitete Form Gl. (7). Die Bahngleichungen lauten

$$\begin{aligned} u &= A \cdot \sin \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w + B \cdot \cos \sqrt{\frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w \\ v &= C \cdot \sin \sqrt{\frac{2}{R^2} + \frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w + D \cdot \cos \sqrt{\frac{2}{R^2} + \frac{1}{R \cdot \varrho}} \cdot w. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Bahngleichung in der u, w -Ebene ist hier ebenso wie in der v, w -Ebene der Systeme der Gruppe 4 eine Summe von zwei Hyperbelfunktionen. Das System übt in dieser Richtung einen zerstreuen Einfluß auf den Elektronenstrahl aus, während es in der vw -Ebene die üblichen Eigenschaften einer elektrischen Sammellinse behält.

Um das offensichtlich ganz verschiedene Verhalten des Systems in den beiden Koordinaten u und v näher zu untersuchen, verfolgen wir ein Strahlenbüschel, das von dem Punkt $(-w_{g0}; u_{g0}; v_{g0})$ ausgeht auf seinem Weg durch das System. Wir bezeichnen die Koordinaten des Gegenstandsraumes mit einem Index g und die des Bildraumes mit einem Index b . Den Ursprung der Systeme legen wir jeweils

in die Eintritts- bzw. Austrittsebene des Umlenkraumes. Das Elektronenstrahlbündel wird beschrieben:

$$\begin{aligned} u_g &= u'_g(w_g + w_{g0}) + u_{g0} \\ v_g &= v'_g(w_g + w_{g0}) + v_{g0}. \end{aligned} \quad (23)$$

In der Eintrittsebene ($w_g = 0$) der Elektronen in den Umlenkraum ist:

$$\begin{aligned} [u_g]_{w=0} &= u'_g \cdot w_{g0} + u_{g0} & \frac{du}{dw} &= u'_g \\ [v_g]_{w=0} &= v'_g \cdot w_{g0} + v_{g0} & \frac{dv}{dw} &= v'_g. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung dieser Anfangsbedingungen werden die Bahngleichungen im Umlenkraum:

$$\begin{aligned} u &= u'_g \cdot R \cdot \sqrt{\frac{q}{R}} \cdot \sin \sqrt{\frac{R}{q}} \cdot \frac{w}{R} + (u'_g \cdot w_{g0} + u_{g0}) \cdot \cos \sqrt{\frac{R}{q}} \cdot \frac{w}{R} \\ v &= v'_g \cdot \frac{R}{\sqrt{2 + \frac{R}{q}}} \cdot \sin \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \frac{w}{R} + (v'_g \cdot w_{g0} + v_{g0}) \cdot \cos \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \frac{w}{R}. \end{aligned} \quad (24)$$

Nach der Umlenkung um den Winkel $\Theta = \frac{w}{R}$ treten die Strahlen in den Bildraum ein, und sie bewegen sich geradlinig weiter:

$$\begin{aligned} u_b &= \left[u'_g \cdot \cos \sqrt{\frac{R}{q}} \cdot \Theta + \sqrt{\frac{R}{q}} \cdot \frac{1}{R} \cdot (u'_g \cdot w_{g0} + u_{g0}) \cdot \sin \sqrt{\frac{R}{q}} \cdot \Theta \right] \cdot w_b + \\ &+ \left[u'_g \cdot R \cdot \sqrt{\frac{q}{R}} \cdot \sin \sqrt{\frac{R}{q}} \cdot \Theta + (u'_g \cdot w_{g0} + u_{g0}) \cdot \cos \sqrt{\frac{R}{q}} \cdot \Theta \right] \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} v_b &= \left[v'_g \cdot \cos \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \Theta - \frac{\sqrt{2 + \frac{R}{q}}}{R} \cdot (v'_g \cdot w_{g0} + v_{g0}) \cdot \sin \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \Theta \right] w_b + \\ &+ \left[v'_g \cdot \frac{R}{\sqrt{2 + \frac{R}{q}}} \cdot \sin \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \Theta + (v'_g \cdot w_{g0} + v_{g0}) \cdot \cos \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \Theta \right]. \end{aligned} \quad (25b)$$

Den Bildpunkt des Strahlenbündels (25) und die optischen Konstanten des Systems finden wir, indem wir den Schnittpunkt je zweier verschiedener Strahlen des Bündels aufsuchen. Infolge des verschiedenen Verhaltens des Systems in der uw -Ebene und der vw -Ebene werden die Schnittpunkte je zweier Strahlen der uw -Ebene bzw. der vw -Ebene an gänzlich anderen Abszissenwerten w zu erwarten sein. Es wird daher zweckmäßig sein, die beiden Koordinaten getrennt zu behandeln.

Wir bestimmen zunächst das optische Verhalten des Systems in der vw -Ebene. Zwei Strahlen, die an dem Gegenstandspunkt (w_{g0} ; v_{g0}) mit den verschiedenen Richtungen v'_{g1} und v'_{g2} ausgehen, treffen sich im Bildraum wieder bei der Ordinate:

$$\begin{aligned} w_{b0} &= \frac{\frac{R}{\sqrt{2 + \frac{R}{q}}} \cdot \sin \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \Theta + w_{g0} \cos \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \Theta}{v_{g0} \cdot \frac{R}{\sqrt{2 + \frac{R}{q}}} \cdot \sin \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \Theta - \cos \sqrt{2 + \frac{R}{q}} \cdot \Theta}, \end{aligned} \quad (26)$$

und nach geringer Umformung:

$$(23) \quad \frac{w_{b0} \cdot w_{g0} - \frac{R^2}{2 + \frac{R}{e}}}{w_{b0} + w_{g0}} = \frac{R}{\sqrt{2 + \frac{R}{e}}} \cdot \cotg \sqrt{2 + \frac{R}{e}} \cdot \Theta. \quad (27)$$

Die v -Ordinate des Bildpunktes erhalten wird, wenn wir (26) in (25 b) einsetzen zu:

$$(24) \quad v_{g0} = \frac{-v_{g0}}{w_{b0} \cdot \frac{\sqrt{2 + \frac{R}{e}}}{R} \cdot \sin \sqrt{2 + \frac{R}{e}} \cdot \Theta - \cos \sqrt{2 + \frac{R}{e}} \cdot \Theta}. \quad (28)$$

Mit den Gleichungen (27) und (28) sind die Beziehungen zwischen den Koordinaten des Gegenstandsraumes und denen des Bildraumes gefunden. Im einzelnen erhält man aus (27) die Abszisse des Brennpunktes, wenn man $w_{g0} \rightarrow \infty$ gehen läßt zu

$$(24) \quad w_{Fv} = + \frac{R}{\sqrt{2 + \frac{R}{e}}} \cdot \cotg \sqrt{2 + \frac{R}{e}} \cdot \Theta. \quad (29)$$

Ebenso ergibt sich aus (28) die Abszisse der doppelten Brennweite w_{2F} , wenn man die Vergrößerung gleich eins oder $v_{g0} = -v_{b0}$ setzt. Aus der Differenz $w_{2F} - w_{Fv}$ erhält man dann die Brennweite des Systems zu

$$(25a) \quad f_v = \frac{R}{\sqrt{2 + \frac{R}{e}}} \cdot \frac{1}{\sin \sqrt{2 + \frac{R}{e}} \cdot \Theta}. \quad (30)$$

Schließlich ergibt sich die Lage der Hauptebene, indem von der Abszisse des Brennpunktes w_{Fv} die Brennweite f_v subtrahiert wird:

$$(25b) \quad h_v = - \frac{R}{\sqrt{2 + \frac{R}{e}}} \cdot \tg \frac{1}{2} \sqrt{2 + \frac{R}{e}} \cdot \Theta. \quad (31)$$

Damit ist das optische Verhalten des Systems in der vw -Ebene festgelegt, und wir müssen nun die gleichen Rechnungen für zwei Strahlen der uw -Ebene durchführen.

Wir bringen wieder zwei Strahlen des Büschels (25) zum Schnitt, die von dem Gegenstandspunkt mit den Richtungen u'_{g1} ; u'_{g2} ausgehen, und erhalten für die Abszisse des Bildpunktes:

$$(32) \quad -w_{b0} = \frac{R \cdot \sqrt{\frac{e}{R}} \cdot \sin \sqrt{\frac{R}{e}} \cdot \Theta + w_{g0} \cdot \cos \sqrt{\frac{R}{e}} \cdot \Theta}{\cos \sqrt{\frac{R}{e}} \cdot \Theta + \sqrt{\frac{R}{e}} \cdot \frac{1}{R} w_{g0} \cdot \sin \sqrt{\frac{R}{e}} \cdot \Theta}.$$

Seine Ordinate erhalten wir wieder, indem wir aus (25a) die zugehörige Ordinate u_{b0} bestimmen.

$$(26) \quad u_{b0} = \frac{u_{g0}}{\cos \sqrt{\frac{R}{e}} \cdot \Theta + \sqrt{\frac{R}{e}} \cdot \frac{1}{R} w_{g0} \cdot \sin \sqrt{\frac{R}{e}} \cdot \Theta}. \quad (33)$$

Mit den Gleichungen (32) und (33) sind analog wie mit (27) und (28) jetzt auch die Beziehungen zwischen den Koordinaten ($u_g; w_g$) des Gegenstandsraumes und denen des Bildraumes ($u_b; w_b$) festgelegt. Aus (32) erhält man wieder die Koordinaten des Brennpunktes, wenn man $w_{g0} \rightarrow \infty$ gehen läßt:

$$w_{Fu} = -R \cdot \sqrt{\frac{\varrho}{R}} \cdot \cotg \sqrt{\frac{R}{\varrho}} \cdot \Theta. \quad (34)$$

Die Abszisse des Brennpunktes ist negativ, der Brennpunkt befindet sich in bzw. vor der Linse; das System ist optisch eine Negativlinse.

Setzen wir in (33) $u_{b0} = u_{g0}$, so ist die Gleichung nur erfüllt, wenn der Gegenstand in die gegenstandsseitige Hauptebene rückt, und das Bild ebenso in die Hauptebene zu liegen kommt.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} h_u &= R \cdot \sqrt{\frac{\varrho}{R}} \cdot \frac{1 - \cotg \sqrt{\frac{R}{\varrho}} \cdot \Theta}{\sin \sqrt{\frac{R}{\varrho}} \cdot \Theta} \\ h_u &= -R \cdot \sqrt{\frac{\varrho}{R}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{\varrho}} \cdot \Theta. \end{aligned} \quad (35)$$

Aus (34) und (35) ergibt sich schließlich die Brennweite zu:

$$f_u = -R \cdot \sqrt{\frac{\varrho}{R}} \cdot \frac{1}{\sin \sqrt{\frac{R}{\varrho}} \cdot \Theta}. \quad (36)$$

Mit den Gleichungen (30), (31) und (35), (36) sind die Systeme der Gruppe 5 vollständig beschrieben. Man erkennt, daß diese in den zueinander senkrechten Strahlebenen $v = 0$ und $u = 0$ sich gänzlich verschieden verhalten. In der vv -Ebene haben die Systeme die Eigenschaften von Sammellinsen mit der Brennweite f_v (30) und der Lage der Hauptebene h_v (31); dagegen in der dazu senkrechten Ebene zeigen die Systeme Eigenschaften von Zerstreuungslinsen mit der negativen Brennweite f_u (36). Selbst die Lage der Hauptebene (35) ist jetzt eine andere.

Da die Systeme der Gruppe 4 ähnliche Bewegungsgleichungen und Bahngleichungen haben, können wir die Ergebnisse ohne weiteres auf diese übertragen, und für diese Systeme den Gleichungen (30), (31) und (35), (36) entsprechende Beziehungen anschreiben.

Damit sind die optischen Eigenschaften der zum Hauptstrahl einfach symmetrischen Rotationsfelder so weit geklärt, daß wir dazu übergehen können, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen man mit Hinzunehmen einer gewöhnlichen sammelnden Linse nach der Umlenkung eine punktförmige Abbildung erzielen kann.

II. Die Abbildung durch einfachsymmetrische Rotationsplatten

Nachdem wir in dem vorangehenden Abschnitt die optischen Eigenschaften der verschiedenen Umlenkensysteme gewonnen haben, wollen wir nun dazu übergehen, die Bedingungen einer punktförmigen Abbildung durch derartige Systeme zu untersuchen.

Unter den behandelten Umlenkensystemen ist der Kugelkondensator in der Gruppe 2 das einzige System, das außer der Umlenkung auf den Elektronenstrahl

den Einfluß einer normalen Linse ausübt. Er bildet die Gegenstandsebene ähnlich in die Bildebene ab. Seine Brennweite ist nur eine Funktion des Umlenkwinkels Θ , sie ist von den angelegten Spannungen unabhängig. Für ein einmal gewähltes Umlenkensystem ist die Brennweite also konstant. Kombiniert man einen derartigen Umlenkkondensator mit einer elektrischen oder magnetischen Sammellinse, so ist es möglich, einen ganzen Bereich der Gegenstandsebene nach der Umlenkung optisch treu auf einen Leuchtschirm abzubilden. Die Art und Größe der Abbildungsfehler sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Verzichtet man auf die Ähnlichkeit zwischen der Gegenstands- und Bildebene, so konnte man auch mit dem System 2b eine punktförmige Abbildung erhalten. Kombiniert man das Umlenkensystem mit einer Sammellinse, so erhält man den Gleichungen (17) analoge Beziehungen, aus denen man die Größen von R und ϱ ableiten kann, mit denen unter den gewünschten Umständen eine Umlenkung mit punktförmiger Abbildung zu erreichen ist. Das Strahlenbüschel ist in dem Falle nicht mehr homozentrisch, es hat, wie in Abb. 6, in einer Richtung einen Überkreuzungspunkt. Auch bei diesem kombinierten System erhält man nur bei großen Umlenkwinkeln eine punktförmige Abbildung. Die Abbildung mit diesem System ist daher nicht von praktischem Interesse.

Als nächstes System betrachten wir den Zylinderkondensator und das diesem analoge System 3. Diese Systeme verhalten sich optisch wie Zylinderlinsen, sie beeinflussen den Elektronenstrahl nur in einer Ebene, während der Strahl in der dazu senkrechten Ebene unbeeinflusst den Umlenkkondensator passiert. Die Abbildung durch einen Zylinderkondensator mit einer Sammellinse entsprechend der Abb. 7 führt im allgemeinen zu einem astigmatischen Bildpunkt. Das Strahlenbüschel von kreisförmigem Querschnitt, das die Eintrittsebene $e-e$ des Zylinderkondensators durchsetzt, hat im allgemeinen beim Verlassen des Kondensators einen elliptischen Querschnitt.

Wird der Umlenkwinkel $\Theta = 127^\circ$, so wird die Brennweite (10) sehr groß und geht schließlich nach ∞ . Mit der Brennweite wird auch der Abstand der Hauptebene von der Begrenzungsfläche des Kondensators groß, und zwar geht dieser stärker nach ∞ als die Brennweite f . Ein paralleles in den Kondensator einfallendes Elektronenstrahlbüschel verläßt dann den Kondensator nach der Umlenkung

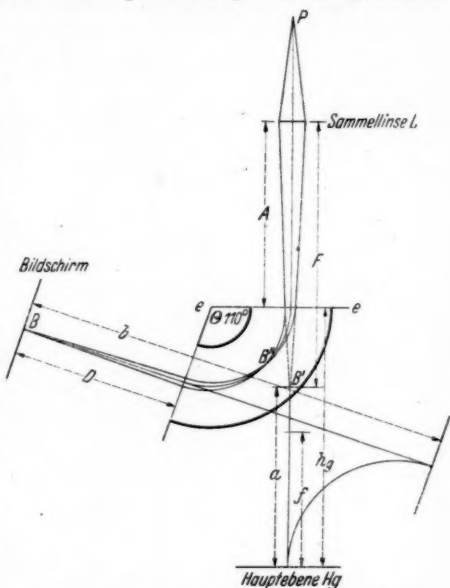


Abb. 7. Geometrische Konstruktion der Abbildung durch einen Zylinderkondensator

wieder als ein paralleles Bündel. Der Strahlengang hat im Innern des Kondensators einen Überkreuzungspunkt, ein reelles Zwischenbild.

Läßt man einen Überkreuzungspunkt im Kondensatorinnern zu, so wird außer der Abbildung des unendlichfernen Punktes für diskrete Kombinationen der Größen R , Θ , und D auch eine Abbildung durch den Kondensator möglich sein. Die punktförmige Abbildung wird erreicht, wenn die Sammellinse L das Strahlenbündel in der Bildebene B fokussiert und gleichzeitig der Zylinderkondensator das reelle Zwischenbild B'' in die Bildebene abbildet.

Aus der Abb. 7 ergibt sich im Falle der punktförmigen Abbildung die Brennweite F der Sammellinse L zu:

$$F = A + \frac{\Theta}{180} \cdot \pi \cdot R + D.$$

Der Bildabstand von der bildseitigen Hauptebene ist:

$$b = h_b + D = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Theta}{\sqrt{2}} + D. \quad (37)$$

Der Abstand des Zwischenbildes B' von der gegenstandsseitigen Hauptebene ergibt sich zu:

$$a = h_g - \frac{\Theta}{180} \cdot \pi \cdot R - D. \quad (38)$$

Im Falle der punktförmigen Abbildung müssen a und b der Linsengleichung

$$a + b = \frac{a \cdot b}{f} \quad (39)$$

genügen. Setzt man a und b in (39) ein und setzt man ferner noch $D = C \cdot R$, so wird

$$\begin{aligned} & \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin \sqrt{2} \Theta} \cdot \left[2 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Theta}{\sqrt{2}} - R \cdot \frac{\Theta}{180} \cdot \pi \right] \\ &= \left[\frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Theta}{\sqrt{2}} - R \left(\frac{\Theta \pi}{180} + C \right) \right] \cdot \left[\frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Theta}{\sqrt{2}} + R \cdot C \right], \end{aligned} \quad (40)$$

setzt man $\operatorname{tg} \frac{\Theta}{\sqrt{2}} = A$; $\sin \sqrt{2} \cdot \Theta = \frac{2A}{1+A^2}$, so wird:

$$\begin{aligned} & C^2 + \frac{\Theta \cdot \pi}{180} \cdot C + \frac{\Theta \cdot \pi}{360} \cdot \frac{A}{\sqrt{2}} - \frac{\Theta \cdot \pi}{360} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{A} + \frac{1}{2} = 0 \\ & C = -\frac{\Theta \cdot \pi}{360} \pm \sqrt{\left(\frac{\Theta \cdot \pi}{360} \right)^2 - \frac{\Theta \cdot \pi}{360 \cdot \sqrt{2}} \cdot A + \frac{\Theta \cdot \pi}{360 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{A} - \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Für die Werte von Θ , für die die Beziehung erfüllt wird, gibt es eine punktförmige Abbildung. Im Bereich von $\Theta = 0^\circ$ bis $\Theta = 127,3^\circ$ ist C imaginär. In dem Bereich ist keine punktförmige Abbildung möglich. Erst von $\Theta = 127,3^\circ$ bis $\Theta \approx 180^\circ$ ist C reell und positiv und also eine punktförmige Abbildung durch den Zylinderkondensator möglich.

Nachdem in gewissen Bereichen des Umlenk winkels sich eine Abbildung durch den Zylinderkondensator ermöglichen ließ, ist unter ähnlichen Bedingungen

schließlich auch eine punktförmige Abbildung durch die Systeme der Gruppen 4 und 5 zu erwarten.

Die System der Gruppen 5 haben ähnlich dem Zylinderkondensator neben der Umlenkung in einer Strahlebene die Wirkung einer Sammellinse mit der Brennweite f_u [Gl. (30)] auf den Elektronenstrahl; dagegen in der dazu senkrechten Strahlfläche zeigten sie die Eigenschaften von Zerstreuungslinsen mit der negativen Brennweite f_u [Gl. (36)].

Um mit einer Linse L_1 durch ein derartiges Umlensystem eine punktförmige Abbildung zu erreichen, muß der Strahlengang in der uw -Ebene (Abb. 8a) durch die Linse L_1 und die durch das Umlensystem gebildete negative Linse L_2 und der Strahlengang in der vw -Ebene (Abb. 8b) durch die Linse L_1 und die durch das Umlensystem gebildete Sammellinse L_3 in der gleichen Bildebene $b-b$ einen Brennpunkt haben. Aus der Optik ist die Brennweite eines aus einer Sammellinse der Brennweite f_1 und einer Zerstreuungslinse der Brennweite f_2 zusammengesetzten Systemes gegeben zu

$$F = \frac{f_1 \cdot f_2}{e - (f_1 - f_2)}. \quad (42)$$

Hierin bedeutete F die gesamte Brennweite der Linsenordnung und e die Entfernung zwischen L_1 und L_2 . Entsprechend ist der Abstand a von der Zerstreuungslinse bis zum Brennpunkt gegeben durch

$$a = - \frac{f_2(f_2 - e)}{e - (f_1 - f_2)}. \quad (43)$$

Ein derartig zusammengesetztes System hat nur dann eine positive Brennweite und damit einen reellen Bildpunkt, wenn der Nenner in (43) positiv ist. Im anderen Falle mit $e - (f_1 - f_2) \leq 0$ ist die Brennweite unendlich bzw. negativ und das System in seiner Gesamtheit ist eine Zerstreuungslinse. Damit erhalten wir als erste Bedingung, die für eine punktförmige Abbildung erfüllt sein muß: der Brennpunkt der Linse L_1 darf nur wenig ($> f_2$) hinter der Hauptebene der Zerstreuungslinse in dem Umlenkcondensator liegen. Durch die Zerstreuungslinse wird der Brennpunkt dann in die Bildebene $b-b$ verlegt.

In der uw -Strahlfläche wird der Brennpunkt der Linse L_1 durch den ersten Teil der Linse L_3 vorverlegt und zu einem reellen Zwischenbild gebracht. Der weitere Teil des Umlensystems muß dann dieses Zwischenbild ebenfalls in die Bildebene $b-b$ abbilden, so daß dort ein reelles punktförmiges Bild des Punktes P entsteht.

Werden beide Bedingungen erfüllt, so ist die Ebene $b-b$ die Bildebene des Gegenstandspunktes P .

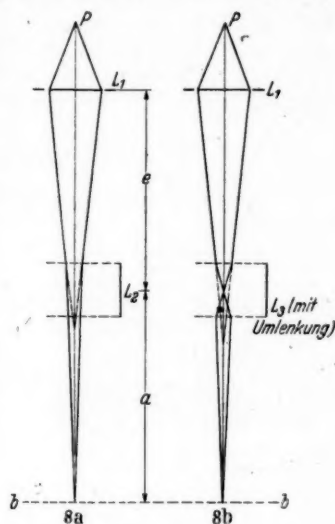


Abb. 8.

Strahlengang in einem Umlensystem 5.
a) in der uw -Fläche des Strahles
b) in der vw -Fläche des Strahles

Da wir in den beiden Strahlflächen (uw) und (vw) mit völlig verschiedenen optischen Systemen abbildeten, ist nicht zu erwarten, daß die Vergrößerung in der Bildebene in Richtung der u -Achse und der v -Achse gleich ist; insbesondere wird in der v -Achse durch die Wirkung der Zerstreuungslinse eine erheblich größere Vergrößerung zu erwarten sein als in der u -Achse (vgl. den Strahlengang eines Teleobjektivs). Man hat also bei der Abbildung eines Gegenstandsfeldes in der Bildebene ein in einer Richtung gezerrtes Bild zu erwarten. Während eine derartige Zerrung des elektronenoptischen Bildes zwar optisch interessant, aber in den meisten Fällen unerwünscht ist, gewinnt diese Tatsache gewisse Bedeutung für Bildröhren und Oszillographenröhren. Für diese ist starke Vergrößerung in einer Richtung gleichbedeutend mit leichter Ablenkbarkeit in dieser Richtung. Es erscheint daher nicht ausgeschlossen, daß verkürzte Bildröhren oder Oszillographenröhren neben ihrer kleineren Baulänge den Vorteil größerer Ablenkempfindlichkeit zumindest in einer Ablenkrichtung bringen werden.

III. Versuche zur Kontrolle der Abbildung

Für eine Anwendung der behandelten Umlenkssysteme ist neben dem bloßen Vorhandensein einer Abbildung auch die Güte derselben maßgebend; es ist also

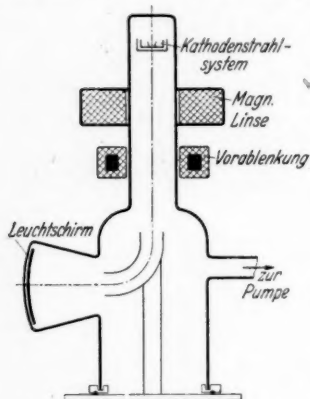


Abb. 9.

Versuchs-Elektronenstrahlröhre zur Untersuchung der Umlenkensysteme

die Größe des erreichbaren Elektronenbrennflekes, des Bildpunktes, von Wichtigkeit. Zur Kontrolle der errechneten Abbildungen und zur Beurteilung der Bildgüte wurden an einer demontierbaren Elektronenstrahlröhre mehrere Systeme untersucht. Die Röhre (Abb. 9) war eingerichtet für den Umlenkungsbereich von $\Theta = 80^\circ$ bis $\Theta = 110^\circ$. Sie hatte in dem Röhrenhals als Elektronenquelle ein elektronenoptisches Schirmgittersystem mit einer Wolframkathode. Als Sammellinse war eine magnetische Linse über den Röhrenhals geschoben. Dicht hinter derselben war eine magnetische Vorablenkung vorgesehen, mit der der Eintrittspunkt des Elektronenstrahles in den Umlenkcondensator nach Belieben eingestellt werden konnte. Die verschiedenen zu untersuchenden Umlenkensysteme waren auf eine Grundplatte montiert und konnten von unten in die Röhre eingeschoben werden.

Die Grundplatte schloß mit einem Gummiring die Röhre vakuumdicht ab. Der Leuchtschirm, eine Zinkcadmiumsulfidschicht, hatte einen Abstand von dem Umlenkensystem von 12–14 cm.

Untersucht wurde zuerst ein Umlenkensystem der Gruppe 2, ein Kugelcondensator. Die Platten des Systems waren aus Kugelflächen von 4 und 6 cm Radius ausgeschnitten. Der Abstand der Platten voneinander betrug 2 cm. Der Umlenkungswinkel war 90° . Die Spannung an beiden Platten war symmetrisch zur Anodenspannung U gewählt, derart, daß die äußere Platte eine Spannung von $U - A$ und die innere eine von $U + A$ erhielt. Unter diesen Bedingungen war die Abbildung befriedigend, die Punktschärfe war gut, der Punktdurchmesser betrug

0,5 mm. Mit etwas veränderter Spannung A konnte der Bildpunkt über einen größeren Bereich scharf abgebildet werden. Eine Umlenkung mit punktförmiger Abbildung war mit dem System in dem Winkelbereich $90^\circ \pm 15^\circ$ gut möglich.

Dann wurde ein System der Gruppe 4 (vgl. Abb. 4) zur Abbildung herangezogen. Das System hatte eine Umlenkung von 90° , der Bahnradius R war, je nach dem Eintrittspunkt des Strahles, zwischen 4 und 5 cm wählbar. Die Krümmung ϱ war 6,5 cm. Der Punkt war wenig astigmatisch mit einem Durchmesser von 0,7 mm. Die Abbildung war als punktförmig und genügend anzusprechen. Das System zeigte ferner den Vorteil, daß die Vergrößerung und damit die Auslenkung in einer Richtung 3,5mal größer war als in der dazu senkrechten Richtung.

Zur Züchtung von Umlenksystemen für Oszillographen mit hoher Ablenkempfindlichkeit wurden weitere Systeme untersucht, die elektronenoptisch von der hier besprochenen Gruppe abweichen. Es war mit Systemen dieser Art möglich, die Ablenkempfindlichkeit bis zum 8—10fachen der unter gleichen Bedingungen arbeitenden üblichen Röhren zu steigern.

Unter den untersuchten Systemen verdient schließlich ein System Erwähnung, das ebenfalls einen Ausschnitt aus einem Ringkondensator darstellt, bei dem der Elektronenstrahl aber parallel zur Rotationsachse in den Umlenk Kondensator eintritt. Elektronenoptisch unterscheidet sich das System von dem besprochenen dadurch, daß ϱ in dem Kondensator von w abhängig ist. Das System war geeignet, in einer Röhre der Abb. 2 Verwendung zu finden. Es lieferte einen scharfen Bildpunkt nach einer Umlenkung um 90° und bei geeigneter geringer Vorablenkung konnte der Bildpunkt auf dem zylinderförmigen Leuchtschirm der Röhre zum Umlaufen gebracht werden. Abb. 10 gibt schließlich das Bild einer derartigen Musterröhre. Die Linse L_1 ist hier eine in der Röhre eingebaute elektrostatische Linse. Die Spule dient zur schwachen kreisförmigen Vorablenkung. Die Röhre ist außer für den Elektronenstrahlschalter auch für eine Polarkoordinatenröhre mit großem Kreisdurchmesser gut geeignet.

Der experimentelle Teil der Arbeit wurde in einem Laboratorium der Telefunken G.m.b.H. bei Prof. Knoll durchgeführt, dem ich auch für häufige anregende Diskussionen sehr zu Dank verpflichtet bin.

Berlin-Buch, Institut für Festkörperforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

(Bei der Redaktion eingegangen am 2. September 1947.)

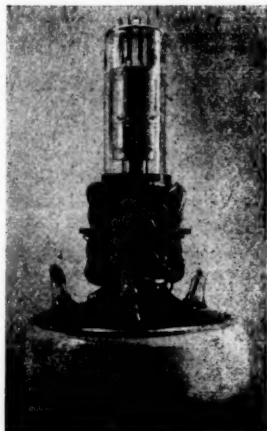


Abb. 10. Versuchsröhre mit auf dem Zylindermantel umlaufendem Elektronenbrennfleck (Kreissoszillographenröhre)

Über die Augenempfindlichkeit an der ultraroten Grenze¹⁾

Von E. Lau und W. Leo

(Mit 7 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Bei hinreichender Strahldichte kann Strahlung des Wellenlängenbereichs zwischen 760 und 980 $m\mu$, der außerhalb des normalerweise „sichtbaren“ Spektrums liegt, vom Auge noch deutlich als dunkelroter Lichtreiz wahrgenommen werden. Durch Photometrierung intensiver Lichtquellen hinter verschiedenen Ultrarotfiltern gelang es, die Reizkurven dieser Ultrarotwahrnehmung spektral festzulegen und daraus den spektralen Empfindlichkeitsverlauf des Auges in diesem Gebiet zahlenmäßig zu bestimmen. Aus der Tatsache, daß die Wahrnehmung in diesem Spektralbereich kein Purkinje-Phänomen zeigt, kann gefolgert werden, daß es sich — ebenso wie im normalen sichtbaren Rot — um reines Zapfensehen handelt.

Die Grenzen des sichtbaren Spektralbereichs, innerhalb dessen das menschliche Auge mit Farbwahrnehmungen anspricht, lassen sich bekanntlich nicht genau festlegen, da ihre Lage weitgehend von der Leuchtdichte des beobachteten Spektrums, vom Adaptationszustand des Auges und von den sonstigen Beobachtungsbedingungen abhängt. Während bei mäßigen Leuchtdichten meist nur der Bereich zwischen etwa 450 und 700 $m\mu$ Wellenlänge wahrgenommen wird, dehnt sich mit steigender Helligkeit der sichtbare Bereich nach dem violetten und roten Ende hin aus und umfaßt bei höheren Leuchtdichten, wie sie z. B. in intensivem Sonnenlicht erreicht werden, etwa den Bereich der Fraunhoferschen Linien H bis A, d. h. von etwa 400 bis 760 $m\mu$. An den Enden dieses Bereichs hat das Auge nur noch $\frac{1}{3500}$ bzw. $\frac{1}{10000}$ seiner Maximalempfindlichkeit im gelbgrünen Gebiet (bei 555 $m\mu$). Die Reizwirkung, die das extreme Violett oder Rot auf das Auge ausübt, wird daher auch bei hoher Strahldichte so gering, daß sie gegenüber der des blau-grün-gelben Farbgebiets unerschwellig bleibt, so daß die Sichtbarkeit des Spektrums hier praktisch aufhört. Das gilt jedenfalls bei normalen Versuchsbedingungen, wenn dem Auge ein kontinuierlich von ultraviolett bis ultrarot reichendes Spektrum dargeboten wird.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn kein ausgedehntes Spektrum, sondern nur monochromatische oder ausgefilterte ultraviolette bzw. ultrarote Strahlung unter völliger Fernhaltung der reizstärkeren Spektralgebiete zur Beobachtung kommt. In diesem Fall befindet sich das Auge in einem anderen Adaptationszustand und kann dann unter geeigneten Bedingungen noch Strahlung wahr-

¹⁾ Vorliegende Arbeit wurde 1944/45 an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt durchgeführt, konnte aber aus technischen Gründen bisher nicht veröffentlicht werden.

nehmen, deren Wellenlänge weit außerhalb des normalen sichtbaren Gebiets liegt. Im ultravioletten Gebiet ist die Wahrnehmbarkeit des Lichts starker ausgeblendet (Quecksilberlinien mehrfach Gegenstand der Untersuchung gewesen²⁾), wobei sich ergeben hat, daß die Strahlung der Hg-Linie $\lambda = 313 \text{ m}\mu$ von der Mehrzahl der Beobachter noch als schwach lavendelblaues Licht gesehen werden kann. Aus der für diese Lichtwahrnehmung erforderlichen Strahlendichte kann man entnehmen, daß die Augenempfindlichkeit zwischen $400 \text{ m}\mu$ (der normalen Sichtbarkeitsgrenze) und $313 \text{ m}\mu$ etwa auf den 10^{-4} -ten Teil absinkt.

Ähnlich liegen die Dinge auch am ultraroten Ende des sichtbaren Spektrums. Auch hier können ausgefilterte Spektralbereiche, deren Wellenlänge beträchtlich außerhalb des normalen sichtbaren Gebiets liegt, noch deutlich sichtbare Farb- reize von dunkelkirschroter Farbe hervorrufen. Dieses Wahrnehmungsgebiet scheint bisher nicht näher untersucht zu sein³⁾, insbesondere fehlen bisher im Schrifttum zahlenmäßige Angaben über den Verlauf der Empfindlichkeitskurve des Auges jenseits $760 \text{ m}\mu$ ⁴⁾. Da die Erscheinungen, die hier zur Beobachtung kommen, sowohl in physiologisch-optischer Hinsicht von Interesse sind, als auch für verschiedene Fragen der Verwendung von Rot- und Ultrarotfiltern an intensiven Lampen, Strahlöfen usw. von praktischer Bedeutung sein können, wurden von uns genauere Versuche hierüber angestellt und der Verlauf der Augenempfindlichkeit in diesem Gebiet quantitativ ermittelt. Über die Methode dieser Untersuchung und ihre Ergebnisse soll im Nachstehenden berichtet werden.

I. Beobachtungs- und Meßbedingungen

In Abb. 1 ist in logarithmischem Maßstab der Verlauf der spektralen Hellempfindlichkeit des „mittleren Normalauges“ wiedergegeben, wie er auf Grund zahlreicher Messungen international festgelegt ist (IBK-Werte)⁵⁾. Wie dieser Kurvenverlauf zeigt, ist an den Enden des sichtbaren Gebiets der Empfindlichkeitsabfall außerordentlich steil. Nahe der ultraroten Grenze nimmt die Empfindlichkeit beim Fortschreiten von 10 zu $10 \text{ m}\mu$ jeweils auf die Hälfte des vorangegangenen Wertes ab,

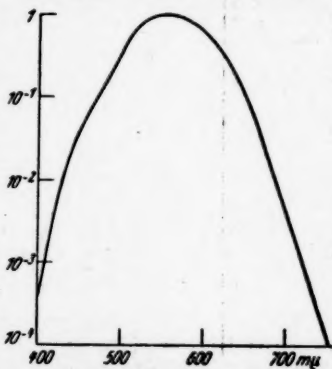


Abb. 1. Internationale Werte der spektralen Hellempfindlichkeit des Auges

²⁾ C. F. Goodeve, *Nature* **134**, 416 (1934); W. de Groot, *Nature* **134**, 494 (1934); A. G. Gaydon, *Proc. phys. Soc.* **50**, 714 (1938).

³⁾ Eine Arbeit von M. Luckiesh und F. K. Moss, *J. Opt. Soc. Amer.* **27**, 69 (1937), die sich mit der Einwirkung von Ultrarotstrahlung auf das Auge beschäftigt, hat lediglich die Frage nach Unterschieden der Sehfunktion bei Tages- und Kunstlicht zum Gegenstand.

⁴⁾ Nach Drucklegung der Arbeit ist uns noch eine Arbeit bekanntgeworden: Griffin, Hubbard, Wald, *J. Opt. Soc. Amer.* **37**, 546 (1947). Über die Empfindlichkeit des menschlichen Auges für Ultrarot. Die Verfasser haben gleichfalls Messungen der Empfindlichkeit des menschlichen Auges im fernen Ultrarot gemacht.

⁵⁾ Internationale Beleuchtungskommission 1924. Vgl. z. B. Walsh, *J. Opt. Soc. Amer.* **11**, 111 (1925). Die geringen Abweichungen von dieser Kurve, die sich nach neueren Untersuchungen bei heterochromen photometrischen Messungen ergeben, können für vorliegende Untersuchung außer Betracht bleiben.

so daß mehr und mehr Strahlungsleistung aufgewandt werden muß, um im Gebiet längerer Wellen noch einen Lichtreiz zu erzeugen.

Wie weiter unten gezeigt wird, setzt sich dieser steile Empfindlichkeitsabfall auch über $\lambda = 760 \text{ m}\mu$ hinaus fort. Bei $800 \text{ m}\mu$ ist bereits die 15fache, bei $860 \text{ m}\mu$ rund die 1000fache, bei $900 \text{ m}\mu$ die 10000fache Strahldichte erforderlich wie an der normalen Sichtbarkeitsgrenze bei $\lambda = 760 \text{ m}\mu$, um gleichstarken Lichtreiz hervorzurufen. Das bedeutet, daß man z. B. bei $900 \text{ m}\mu$ eine Strahldichte von etwa 60 Watt/cm^2 aufbringen muß, um dem Auge eine Mindestleuchtdichte von 10 asb darzubieten, die als untere Grenze für eine Farbwahrnehmung mit den Netzhautzapfen (Schwelle des Tagessehens) betrachtet werden kann⁶⁾.

Eine solche Strahldichte ist auf dem üblichen Wege spektraler Zerlegung mit Monochromatoren oder dergleichen kaum herstellbar, was sich schon überschlagsmäßig daraus ergibt, daß z. B. der intensive Krater einer Reinkohlen-Bogenlampe von rund 3700° K Farbtemperatur eine Gesamtstrahldichte von etwa 1000 Watt/cm^2 besitzt und daß hiervon in den nahen ultraroten Bereich von 800 bis $1000 \text{ m}\mu$ insgesamt nur $5,5\%$, d. h. rund 55 Watt/cm^2 entfallen. Selbst bei Benutzung einer so intensiven Lichtquelle muß man also bereits die ganze Strahlung dieses Wellenlängenbereichs konzentriert dem Auge darbieten, um bei etwa $900 \text{ m}\mu$ noch einen Lichtreiz hervorzurufen. Jede spektrale Zerlegung, die engere Spektralbezirke ausgrenzt und überdies noch mit unvermeidlichen Strahlungsverlusten im Monochromator verknüpft ist, würde die Strahldichte soweit herabsetzen, daß sie praktisch keinen Lichtreiz im Auge mehr erzeugt.

Auch wenn man sich aus diesem Grunde bei spektraler Zerlegung z. B. auf die Ausgrenzung größerer Wellenlängenbereiche beschränken würde, um hinreichende Energie zur Verfügung zu haben, so würde trotzdem ein solches Meßverfahren mit Monochromatoren unbefriedigend bleiben, weil infolge des steilen Verlaufs der Augenempfindlichkeit von dem jeweils ausgegrenzten Spektralbereich fast ausschließlich das kurzwellige Ende merkbare Wahrnehmungsreize hervorrufen würde. Man würde also aus der Wellenlängeneinstellung des Monochromators und seiner Spaltbreite kein zutreffendes Bild der tatsächlich im Auge wirksamen Strahlungsverteilung gewinnen.

Günstiger als in spektral zerlegtem Licht lassen sich deshalb die Beobachtungen und Messungen in diesem Wellenlängengebiet mittels stufenweiser Ausfilterung durch Ultrarotfilter vornehmen, die einen tunlichst steilen Durchlässigkeitsanstieg zwischen etwa 750 und $800 \text{ m}\mu$ haben, also das sichtbare Spektrum unterhalb $750 \text{ m}\mu$ praktisch völlig absorbieren, dagegen im Gebiet oberhalb $800 \text{ m}\mu$ gut durchlässig sind. Solche Filter sind z. B. die Gläser RG 7, UG 7 und UG 6 von

⁶⁾ Eine Leuchtdichte von $10 \text{ asb} = \frac{1}{1000} \pi \text{ sb}$ erzeugt je cm^2 leuchtender Fläche im Raumwinkel 1 einen Lichtstrom von $3,18 \cdot 10^{-4}$ Lumen. Nach dem mechanischen Lichtäquivalent entspricht diesem Lichtstrom bei der Wellenlänge der maximalen Hellempfindlichkeit des Auges ($555 \text{ m}\mu$) ein Strahlungsfluß von $3,18 \cdot 10^{-4} \cdot 0,00144 = 4,58 \cdot 10^{-7}$ Watt, d. h. zur Erzielung einer Leuchtdichte von 10 asb ist bei dieser Wellenlänge eine monochromatische Strahldichte von $4,58 \cdot 10^{-7} \text{ Watt/cm}^2$ erforderlich. — Bei anderen Wellenlängen braucht man entsprechend dem Abfall der Augenempfindlichkeit höhere Strahldichten, um gleiche Leuchtdichte zu erzielen, und zwar müssen die Strahldichten umgekehrt proportional der Augenempfindlichkeit sein. Man erhält auf diese Weise folgende Werte für 10 asb Leuchtdichte:

bei $760 \text{ m}\mu$	$7,65 \cdot 10^{-3} \text{ Watt/cm}^2$
bei $860 \text{ m}\mu$	$6,0 \text{ Watt/cm}^2$
bei $900 \text{ m}\mu$	60 Watt/cm^2

Schott u. Gen., Jena. Wie der in Abb. 2 dargestellte Durchlässigkeitsverlauf dieser Gläser⁷⁾ zeigt, kann man damit gerade das hier interessierende Spektralgebiet nahezu ungeschwächt ausfiltern und gleichzeitig das kürzerwellige (sichtbare) Gebiet völlig unterdrücken. Man hat demnach mit solchen Filtern einerseits die Möglichkeit, bestimmte ultrarote Wellenlängenbereiche auszufiltern und mit hoher Strahldichte dem Auge darzubieten; andererseits fällt die erwähnte Überwertung der kurzen Wellen eines dargebotenen Spektralbereichs, wie sie bei spektraler Zerlegung unvermeidlich ist, hier fort, da der Steilabfall der Augenempfindlichkeit nach langen Wellen hin durch den steilen Anstieg der Filterdurchlässigkeit weitgehend ausgeglichen wird. Dadurch kommt hier tatsächlich der gesamte zur Untersuchung stehende Wellenlängenbereich gleichmäßig zur Wirkung. Hierin liegt für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung ein wesentlicher Vorteil der Filtermethode gegenüber Messungen bei spektraler Zerlegung.

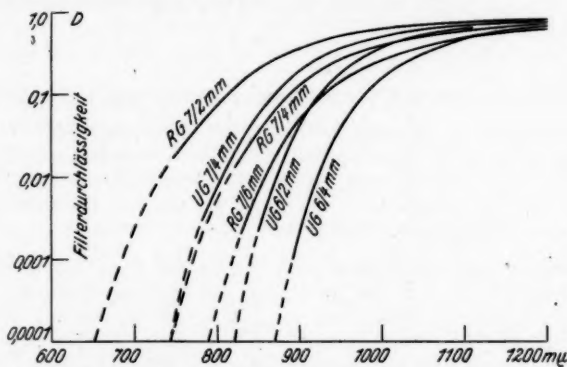


Abb. 2. Spektraler Durchlässigkeitsverlauf von Ultrarotfiltern RG 7, UG 6 und UG 7

Wenn man durch Filtergläser der obengenannten Art hindurch intensive Leuchtflächen, z. B. den Krater einer Bogenlampe, betrachtet, so nimmt das Auge die Lichtquelle noch deutlich mit dunkelroter Farbe wahr. Daß es sich dabei nicht etwa um schwache Reste von normalem roten Licht (unterhalb $750\text{ m}\mu$) handelt, da am Fuße der Durchlässigkeitskurve der Filter noch hindurchgelassen wird, läßt sich leicht zeigen, indem man z. B. mehrere derartige Filter hintereinanderschaltet oder Filter verschiedener Glasdicke verwendet. Licht kürzerer Wellenlänge würde in diesem Fall durch die verstärkte Filterabsorption praktisch zum Verschwinden gebracht werden. In Wirklichkeit nimmt dagegen z. B. bei einem Filter UG 6, wenn man die Glasdicke von 2 auf 4 mm steigert, die Helligkeit einer durch die Filter beobachteten Lichtquelle nur im Verhältnis 13:1 ab. Ähnlich liegen die Zahlenwerte auch bei anderen Filtern dieser Art. (Vgl. die Zahlentafel 2 auf S. 249). Schon aus diesen Schwächungsverhältnissen kann man an Hand der Durchlässigkeitskurven der Filter unmittelbar entnehmen, daß es sich bei dem wahrgenommenen Licht tatsächlich um Strahlung im Wellenlängengebiet zwischen

⁷⁾ Vgl. Abschnitt III, S. 247.

850 und 950 m μ handelt⁶⁾). Auf die Bestimmung der genauen spektralen Lage des hinter den einzelnen Filtern wahrgenommenen Restlichts wird weiter unten näher eingegangen.

Es ist bemerkenswert, daß das Licht dieses Wellenlängenbereichs kein Purkinje-Phänomen zeigt, d. h. auch bei abnehmender Leuchtdichte nicht in Grau übergeht, sondern bis zum Verschwinden mit roter Farbe gesehen wird. Es verhält sich in dieser Hinsicht wie das normale sichtbare Rot, das ausschließlich mit den Zapfen der Netzhaut gesehen wird.

Dem unbewaffneten Auge gelingt es im allgemeinen nicht mehr, bei diesen Wellenlängen scharf zu akkomodieren; lediglich jugendliche Augen mit großem Akkommodationsspielraum können dies noch, jedoch auch diese nur aus größerer Entfernung von 1 bis 2 m. Andere Beobachter brauchen Brillen mit positiver Brechkraft von 1,5 bis 2 Dioptrien, um punktförmige, ultrarotgefilterte Lichtquellen scharf zu sehen.

II. Resthelligkeit und Wahrnehmungskurven von Ultrarotfiltern

Die Unterschiede der visuellen Helligkeit, mit der eine intensive Leuchtfläche hinter Ultrarotfiltern verschiedener Glasdicke bzw. verschiedenen Durchlässigkeitsverlaufs wahrgenommen wird, ermöglichen eine zahlenmäßige Bestimmung der spektralen Hellempfindlichkeit des Auges bis weit ins Ultrarote hinein, und zwar auf Grund folgender Beziehung:

Die wahrgenommene Helligkeit stellt jeweils die Gesamtsumme der Wahrnehmungsreize dar, die von dem Licht der verschiedenen Wellenlängen, soweit es vom Filter hindurchgelassen wird, im Auge ausgelöst werden. Wenn E_λ die in einem schmalen Wellenlängenbereich der Wellenlänge λ emittierte Strahlungsenergie der Lichtquelle, D_λ die Durchlässigkeit des Filters in diesem Bereich und A_λ die zugehörige spektrale Augenempfindlichkeit bedeutet, so ist die Gesamtwahrnehmung des Auges, d. h. die beobachtete Helligkeit der Lichtquelle hinter dem Filter, durch das Integral

$$W = \int_0^\infty E_\lambda D_\lambda A_\lambda d\lambda \quad (1)$$

gegeben.

Bei der in vorliegender Untersuchung benutzten Lichtquelle handelte es sich um den Krater eines Reinkohle-Bogens bei etwa 6 A Stromstärke auf 5 mm starker positiver Kohle (vgl. Abschnitt IV, S. 249). Das entspricht einer Flächenbelastung von rund 30 A/cm². Der Krater eines solchen Bogens hat eine schwarze Temperatur von etwa 3700° K und liefert eine Strahlungsverteilung, die in dem hier betrachteten Spektralgebiet zwischen 600 und 950 m μ für alle Wellenlängen nahezu kon-

⁶⁾ Ein anschaulicher Demonstrationsversuch, der die spektrale Lage z. B. des durch ein Ultrarotfilter UG 6 oder RG 7 wahrgenommenen Restlichts verdeutlicht, besteht darin, daß man das abgefilterte Licht einer Strahlenquelle einmal durch ein Wärmeschutzglas, z. B. ein Schottglas BG 19, das andere Mal durch ein zweites Ultrarotfilter beobachtet. Es überrascht dann zunächst, daß die wahrgenommene Helligkeit durch das schwärzlich aussehende UR-Filter nur wenig geschwächt wird, während das für Tageslicht gut durchlässige, also fast weiß erscheinende Wärmeschutzglas die Lichtquelle nahezu vollständig abdunkelt.

stanten Wert besitzt (vgl. Abb. 3). Die Größe E_λ in obiger Gl. (1) ist also im ganzen Bereich praktisch unabhängig von der Wellenlänge, so daß man in vereinfachter Form schreiben kann:

$$W = \text{konst.} \int_0^\infty D_\lambda A_\lambda d\lambda. \quad (2)$$

Das Integral hat stets einen endlichen Wert, da nach kurzen Wellen hin die Filterdurchlässigkeit D_λ , nach großen Wellenlängen hin schließlich die Augenempfindlichkeit A_λ unmeßbar klein wird, so daß in beiden Fällen das Produkt $D_\lambda \cdot A_\lambda$ verschwindet. Nur in einem begrenzten Bereich, dessen Umfang und spektrale Lage von dem Verlauf der jeweiligen Filterdurchlässigkeit zur Augenempfindlichkeitskurve abhängt, hat das Produkt $D_\lambda \cdot A_\lambda$ endliche Werte. Ihr Verlauf, den wir als „Wahrnehmungskurve“ des betreffenden Filters bezeichnen, gibt die spektrale Lage und Verteilung der Helligkeitswahrnehmung hinter diesem Filter wieder; das Integral W dieser Kurve ist der wahrgenommenen Resthelligkeit proportional.

Wenn man demnach den spektralen Durchlässigkeitsverlauf D_λ der benutzten Filter möglichst genau mißt und ferner das Verhältnis der Helligkeiten photometrisch bestimmt, mit denen die erwähnte intensive Lichtquelle hinter den verschiedenen Filtern wahrgenommen wird, so kann man aus der Gleichung (2) den spektralen Verlauf der Augenempfindlichkeit A_λ mit ziemlicher Genauigkeit ableiten. Da die Helligkeit W in obiger Beziehung nur integral gemessen wird und A_λ in diesem Fall in Gl. (2) nicht explizit gegeben ist, kann man dabei allerdings nur so vorgehen, daß man durch schrittweise Näherung einen zunächst angenommenen Verlauf der Augenempfindlichkeitskurve solange verbessert, bis sich bei Multiplikation der A -Werte mit den zugehörigen Durchlässigkeitswerten der Filter Wahrnehmungskurven ergeben, deren Flächenintegral der jeweilig beobachteten Resthelligkeit des Filters proportional ist. Auf die graphische Methode, nach der das zweckmäßigerweise geschieht, sowie auf den hierbei erreichten Genauigkeitsgrad wird im Abschnitt V näher eingegangen.

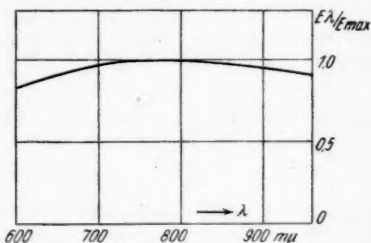


Abb. 3. Relative spektrale Energieverteilung eines Kohle-Lichtbogens zwischen 600 und 960 $m\mu$ entsprechend der eines schwarzen Körpers von 3700° K

III. Spektrale Durchlässigkeit der benutzten Filter

Zur Verwendung kamen bei der vorliegenden Untersuchung drei verschiedene Filtertypen, und zwar die Schottgläser

- RG 7 in 1,8 mm, 4 mm und 6 mm Stärke
- UG 6 in 2 mm und 4 mm Stärke
- UG 7 in 4 mm Stärke.

Alle diese Gläser haben eine nach dem Ultraroten hin steil ansteigende Durchlässigkeit und schneiden das sichtbare Gebiet je nach Lage ihrer Absorptionskante mehr oder weniger vollständig ab.

Zahlentafel 1
Spektrale Durchlässigkeit der Schottgläser RG 7, UG 6 und UG 7

Filter: Glasstärke:	RG 7 1,8 mm	RG 7 4 mm	RG 7 6 mm	UG 6 2 mm	UG 6 4 mm	UG 7 4 mm
Wellenlänge $m\mu$	Durchlässigkeit in % einschl. Reflexionsverlust					
730	0,9	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$7,4 \cdot 10^{-6}$	—	—	$1,6 \cdot 10^{-3}$
740	1,3	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	—	—	$6,5 \cdot 10^{-3}$
750	1,9	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	—	—	$2,2 \cdot 10^{-2}$
760	2,6	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$6,6 \cdot 10^{-4}$	—	—	$5,5 \cdot 10^{-2}$
770	3,6	$8,0 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	—	—	0,13
780	4,6	0,15	$5,3 \cdot 10^{-3}$	—	—	0,26
790	6,0	0,26	$1,3 \cdot 10^{-2}$	—	—	0,5
800	7,8	0,44	$2,9 \cdot 10^{-2}$	—	—	0,8
810	9,5	0,7	$6,3 \cdot 10^{-2}$	—	—	1,3
820	12	1,1	0,12	$9,0 \cdot 10^{-3}$	—	2,0
830	14	1,6	0,22	$3,3 \cdot 10^{-2}$	—	2,9
840	17	2,4	0,38	$8,6 \cdot 10^{-2}$	—	4,2
850	20	3,4	0,63	0,22	—	5,9
860	24	4,8	1,12	0,5	$2,6 \cdot 10^{-3}$	8,0
870	27	6,6	1,75	0,97	$1,0 \cdot 10^{-2}$	10,5
880	30	8,5	2,7	1,7	$3,2 \cdot 10^{-2}$	13
890	—	10,5	3,7	2,8	0,10	—
900	37	13	5,0	4,4	0,25	20
910	—	—	6,6	6,5	0,52	—
920	43,5	18,5	8,5	9,0	1,0	27
930	—	—	10,6	12	1,8	—
940	50	24,5	12,5	15,5	2,8	34
950	—	—	—	—	4,3	—
960	55	30	17	23	6,1	41
970	—	—	—	—	8,1	—
980	60	35	22	30	10,5	47
1,000 μ	64	40	27	38	16	52
1,050	70	52	40	55	33	63
1,100	76	63	51	67	49	71

Der genaue Verlauf der Durchlässigkeitskurven wurde an einem Doppelmonochromator hoher Auflösung in üblicher Weise durch Messung der monochromatischen Bestrahlungsstärke eines Thermoelements mit und ohne Filter bei 29 Wellenlängeneinstellungen des Monochromators zwischen 730 und 1100 $m\mu$ bestimmt. Soweit es sich um Filter gleicher Glasschmelze, aber verschiedener Dicke handelte, konnten die Meßwerte durch Umrechnung von einer Glasstärke auf die andere kontrolliert werden, außerdem ließen sich auf diesem Wege aus den Meßwerten der dünneren Filter auch Durchlässigkeitswerte der dickeren für solche Spektralbereiche gewinnen, in denen die Absorption der letzteren bereits so hoch ist, daß eine unmittelbare Messung nicht mehr möglich war.

Die erhaltenen Durchlässigkeitszahlen D der benutzten sechs Filter sind in der Zahlentafel 1 zusammengestellt^{*)} und in Abb. 2 in logarithmischem Ordinatenmaßstab als Durchlässigkeitskurven aufgetragen.

^{*)} Die Werte der Zahlentafel 1 stellen die tatsächlich wirksame Durchlässigkeit der Filter, also das Verhältnis der durchgelassenen zur auffallenden Strahlung einschließlich der Reflexionsverluste dar.

IV. Leuchtdichte-Bestimmung eines Bogenkraters hinter UR-Filtern

Nachdem in der oben beschriebenen Weise die Durchlässigkeitswerte bestimmt waren, wurden die verschiedenen Filter mittels einer drehbaren Wechselscheibe nacheinander in den Strahlweg eines Kohle-Lichtbogens gebracht und dabei die hinter jedem Filter wahrgenommene relative Leuchtdichte des Bogenkraters von mehreren Beobachtern photometriert. Die Messung geschah in der Weise, daß gemäß Abb. 4 das Licht des Lampenkraters *B* nach Durchtritt durch das Ultrarotfilter *F* mittels einer Linse *L* schwach vergrößert im Gesichtsfeld eines Photometers *P* abgebildet und im Photometerwürfel auf Helligkeitsgleichheit mit einer von der Vergleichslampe *V* beleuchteten Milchglasscheibe *M* abgeglichen wurde. Der Abgleich erfolgte durch meßbare Entfernungsänderung der Scheibe *M* von der Lichtquelle *V*; außerdem konnten gröbere Helligkeitsstufen durch Zwischenschaltung geeigneter Graugläser von $\frac{1}{10}$ bzw. $\frac{1}{100}$ Durchlässigkeit im Strahlweg des Photometers überbrückt werden. Ein Diaphragma *S* sorgte für Fernhaltung störenden Fremdlichts der Bogenlampe; ferner war durch Rotfilter *R* im Vergleichsweg des Photometers ein möglichst weitgehender Farbgleich zwischen dem zu photometrierenden Licht des Bogenkraters und der Vergleichslampe *V* hergestellt, um hinreichende Genauigkeit der Photometrierung sicherzustellen.

Auf diese Weise wurde das relative Helligkeitsverhältnis des Kraterbildes der Bogenlampe hinter den sechs zur Messung verwendeten Filtern in wiederholten Meßreihen von fünf verschiedenen Beobachtern bestimmt. Da alle Beobachter annähernd gleiche normale Augenempfindlichkeit besaßen, ergaben sich zwischen ihren Meßergebnissen nur geringe Abweichungen. Die erhaltenen Zahlenwerte, die in nachstehender Zahlentafel 2 zusammengestellt sind, dürften für jedes normale Auge mit einer mittleren Abweichung von etwa $\pm 5\%$ gelten. Bei den sehr dunklen Filtern, bei denen die noch wahrnehmbare Resthelligkeit sehr gering ist, ist die Meßunsicherheit etwas größer.

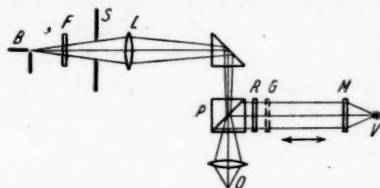


Abb. 4. Photometeranordnung zur Messung der Leuchtdichte einer Bogenlampe hinter UR-Filter.

B Bogenlampe, *F* Filter, *S* Diaphragma, *L* Linse, *P* Photometerwürfel, *R* Rotfilter, *G* Grauglas, *M* Milchglasscheibe, *V* Vergleichslampe, *O* Okular

Zahlentafel 2
Relative Leuchtdichte eines Bogenkraters hinter verschiedenen Ultrarotfiltern

Filter	Glasstärke:	Helligkeitsverhältnis von einem Filter zum folgenden:	Wahrgenommene relative Resthelligkeit des Bogenkraters bezogen auf Filter UG 6, 4 mm stark
UG 6	4 mm		1
UG 6	2 mm	1:13	13
RG 7	6 mm	1:3,45	45
RG 7	4 mm	1:15	675
UG 7	4 mm	1:1,54	1036
RG 7	1,8 mm	1:380	394000

Aus diesen Zahlenwerten kann man im Sinne des oben (S. 245) Gesagten durch Vergleich mit den zugehörigen Durchlässigkeitskurven (Abb. 2) entnehmen, daß

die wahrgenommene Resthelligkeit hinter den ersten fünf aufgeführten Filtern, bei denen die Helligkeitszunahme von Stufe zu Stufe durchweg innerhalb einer Zehnerpotenz bleibt, schon erheblich weit im ultraroten Gebiet liegen muß, wo die Filterabsorption noch gering ist. Die hinter dem Filter RG 7 von 1,8 mm Plattenstärke beobachtete Helligkeit, die nahezu 400mal größer ist, als die des nächstdunkleren Filters UG 7₄ mm, stammt dagegen zum wesentlichen Teil noch aus dem normalen sichtbaren Spektralgebiet. Dieser Übergang der Wahrnehmung von normalem roten zu ultrarotem Licht hinter den verschiedenen hier benutzten Filtergläsern bietet die Möglichkeit, die relativen Werte der Augenempfindlichkeit jenseits 760 m μ , die auf dem nachstehend beschriebenen Wege gewonnen wurden, an die international festgelegten Hellempfindlichkeitswerte (IBK-Werte, vgl. Zahlentafel 3, S. 252) des sichtbaren Gebiets anzuschließen.

V. „Wahrnehmungskurven“ der verschiedenen Filter und der Verlauf der Augenempfindlichkeit jenseits 760 m μ

Die in Zahlentafel 2 angegebenen relativen Leuchtdichten, wie sie photometrisch hinter den einzelnen Filtern beobachtet wurden, müssen nach der in Abschnitt II (S. 246) dargelegten Betrachtung dem Integral

$$W = \text{konst.} \int_0^{\infty} D_{\lambda} \cdot A_{\lambda} d\lambda \quad (2)$$

proportional sein. Die Beziehung (2) gestattet daher, aus dem Verhältnis der Leuchtdichten und dem zugehörigen Durchlässigkeitsverlauf D_{λ} der einzelnen Filter (Zahlentafel 1) den Verlauf der Augenempfindlichkeit A_{λ} im ganzen Spektralbereich zu bestimmen, in dem die Filter noch eine Resthelligkeit des Bogenkraters beobachten lassen.

Das ist allerdings, wie schon erwähnt wurde, nur in der Weise möglich, daß man zunächst einen angenommenen Verlauf von A_{λ} zugrunde legt, diesen mit den D_{λ} -Werten der verschiedenen Filter multipliziert und die daraus sich ergebenden Integralwerte W mit den photometrischen Helligkeitswerten der Zahlentafel 2 vergleicht. Im allgemeinen wird sich dabei zunächst keine genaue Proportionalität zwischen den rechnerisch gewonnenen und den gemessenen Zahlenwerten ergeben, aber die Größe und Richtung der Abweichungen zeigt dann, in welcher Weise der angenommene Verlauf von A_{λ} berichtigt werden muß, um eine bessere Übereinstimmung der Integralwerte mit den gemessenen Leuchtdichtewerten zu liefern. Mit den so verbesserten A_{λ} -Werten muß die Rechnung dann wiederholt und gegebenenfalls die Augenkurve erneut korrigiert werden, bis eine Übereinstimmung zwischen den Integralen der Wahrnehmungskurven und den gemessenen Filterhelligkeiten erzielt ist.

Um bei diesem Näherungsverfahren schon von einigermaßen richtigen Anfangswerten auszugehen, sind wir so vorgegangen, daß wir die international festgelegten Hellempfindlichkeitswerte des Auges in logarithmischem Maß graphisch aufgetragen und vom sichtbaren Gebiet aus nach längeren Wellen hin zunächst geradlinig extrapoliert haben. Mit diesen extrapolierten Näherungswerten wurden in der oben geschilderten Weise die Wahrnehmungskurven derjenigen Filter berechnet, deren Durchlaßbereich dem sichtbaren Gebiet am nächsten liegt, also im vorliegenden Fall die der Filter RG 7₂ mm, UG 7₄ mm und RG 7₄ mm. Die

Flächeninhalte dieser Kurven wurden planimetrisch bestimmt und mit den zugehörigen Helligkeitswerten der Zahlentafel 2 verglichen. Entsprechend den hierbei sich ergebenden Abweichungen konnte dann in dem Spektralbereich, der durch die Wahrnehmungskurven der genannten 3 Filter überdeckt wird (s. Abb. 6), der zunächst extrapolierte Verlauf der Augenkurve A_λ berichtigt werden, und zwar ist diese Berichtigung außerordentlich kritisch, da ja jede Änderung der Steilheit des A_λ -Verlaufs infolge der Integration über den gesamten Wellenlängenbereich der Wahrnehmungskurve mit einem hohen Zahlenfaktor in den sich ergebenden Helligkeitswert W der Gl. (2) eingeht. Eine kleine Änderung von A_λ bedingt bereits beträchtliche Änderungen von W , so daß also diejenige Lage der Augenkurve, die eine Übereinstimmung der Wahrnehmungsintegrale W mit den gemessenen Filterhelligkeiten der Zahlentafel 2 liefert, mit hoher Genauigkeit festgelegt wird.

Die auf diese Weise berichtigten A_λ -Werte können dann in gleicher Art, wie vorstehend geschildert, wieder in logarithmischem Maß aufgetragen und ein weiteres Stück nach längeren Wellen hin graphisch extrapoliert werden. Mit den hierdurch gewonnenen neuen Näherungswerten kann dann das gleiche Rechenverfahren für die weiteren Filter und deren Wahrnehmungskurven wiederholt und so durch schrittweise Extrapolation und nachfolgende Berichtigung an Hand der gemessenen Helligkeitswerte nach und nach der ganze Verlauf der Augenempfindlichkeitskurve soweit zahlenmäßig festgelegt werden, wie sich die Wahrnehmungskurven der benutzten Filter ins ultrarote Gebiet erstrecken. Das ist bis etwa 980 $m\mu$ der Fall⁹⁾.

Die mit Hilfe dieses Rechenverfahrens ermittelten Zahlenwerte der Augenempfindlichkeit sind in der zweiten Spalte der nachstehenden Zahlentafel 3 zusammengestellt, und zwar bezogen auf die maximale Hellempfindlichkeit des Auges bei $\lambda = 555 m\mu$. Die hier angegebenen Zahlen stellen eine unmittelbare Fortsetzung der international festgelegten Hellempfindlichkeitswerte des Auges im sichtbaren Gebiet nach dem Ultraroten hin dar, wobei bemerkenswert ist, daß sie praktisch völlig mit denjenigen A_λ -Werten übereinstimmen, die man nach der von Goldhammer¹¹⁾ angegebenen Funktion für den Verlauf der Augenempfindlichkeit im ultraroten Gebiet erwarten kann. Nach dieser Funktion ist

$$\log A_\lambda = m \left[\log \frac{\lambda_0}{\lambda} + M \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) \right],$$

worin λ_0 die Wellenlänge des Empfindlichkeitsmaximums (555 $m\mu$), $M = \log e = 0,4343$ und m eine Konstante in der Nähe von 185 ist. Um zu zeigen, wie stetig ihr Verlauf vom sichtbaren ins längerwellige, normalerweise „ultrarote“ Gebiet

¹⁰⁾ Ein Versuch mit einer Hg-Höchstdrucklampe hoher Leuchtdichte (Osram Typ HBO 107/24) hinter einem Filter ÜG 6 von 2 mm Stärke ergab, daß die starke Hg-Emission bei $\lambda = 1,014 \mu$ nicht mehr wahrgenommen wurde, obwohl die spektrale Strahldichte hier etwa 1,2 bis 1,3 kW/cm^2 beträgt (Strahlende Fläche des Bogens ca. 0,001 cm^2 , Gesamt-Leistungsaufnahme ca. 100 Watt, Ausbeute der Wellenlänge 1,014 μ ca. 1,3%, s. H. Krefft u. M. Pirani, Z. techn. Physik 14, 393 ff. (1933). Vgl. auch Fußnote 12 S. 253. Herr Prof. Rompe teilte bei einer Diskussion in dem Max von Laue-Kollogium mit, daß es ihm bei gemeinsamen Versuchen mit Herrn B. Rajewski gelungen sei, diese Linie noch als rote Spektrallinie wahrzunehmen.

¹¹⁾ Goldhammer, Ann. Physik (4) 16, 621 (1905).

übergeht, sind auch einige der IBK-Werte zwischen 700 und 760 $m\mu$ mitaufgeführt.

Zahlentafel 3

Relative Hellempfindlichkeit des Auges, bezogen auf das Empfindlichkeitsmaximum bei $\lambda = 555 m\mu$

Wellenlänge $m\mu$	Relative Emp- findlichkeit A	$\frac{A_{\lambda_n}}{A_{\lambda_n+10}}$	Wellenlänge $m\mu$	Relative Emp- findlichkeit A	$\frac{A_{\lambda_n}}{A_{\lambda_n+10}}$
700	$4,1 \cdot 10^{-8}$	1,95	850	$1,47 \cdot 10^{-7}$	1,93
710	$2,1 \cdot 10^{-8}$	2,0	860	$7,58 \cdot 10^{-8}$	1,87
720	$1,05 \cdot 10^{-8}$	2,0	870	$4,2 \cdot 10^{-8}$	1,80
730	$5,2 \cdot 10^{-9}$	2,06	880	$2,3 \cdot 10^{-8}$	1,82
740	$2,5 \cdot 10^{-9}$	2,08	890	$1,3 \cdot 10^{-8}$	1,77
750	$1,2 \cdot 10^{-9}$	2,0	900	$7,7 \cdot 10^{-9}$	1,69
760	$6,0 \cdot 10^{-9}$	2,03	910	$4,5 \cdot 10^{-9}$	1,70
770	$2,94 \cdot 10^{-9}$	1,97	920	$2,6 \cdot 10^{-9}$	1,73
780	$1,49 \cdot 10^{-9}$	1,93	930	$1,56 \cdot 10^{-9}$	1,67
790	$7,7 \cdot 10^{-10}$	1,92	940	$9,2 \cdot 10^{-10}$	1,70
800	$4,0 \cdot 10^{-10}$	1,95	950	$5,6 \cdot 10^{-10}$	1,64
810	$2,05 \cdot 10^{-10}$	1,95	960	$3,5 \cdot 10^{-10}$	1,60
820	$1,05 \cdot 10^{-10}$	1,91	970	$2,2 \cdot 10^{-10}$	1,60
830	$5,5 \cdot 10^{-11}$	1,92	980	$1,38 \cdot 10^{-10}$	1,60
840	$2,85 \cdot 10^{-11}$	1,93			

In der dritten Spalte dieser Tafel sind die Faktoren angegeben, um die jeweils beim Fortschreiten um 10 $m\mu$ nach längeren Wellen hin die Augenempfindlichkeit abnimmt. Man sieht auch aus diesen Zahlen, daß es sich um einen völlig stetigen Kurvenverlauf vom Sichtbaren bis weit ins Ultrarot hinein handelt und daß von einer scharfen oder definierbaren Sichtbarkeitsgrenze nirgendwo die Rede sein kann.

In Abb. 5 ist gestrichelt der geradlinig nach längeren Wellen extrapolierte Verlauf der IBK-Werte der Augenempfindlichkeit sowie in ausgezogener Kurve der tatsächliche Empfindlichkeitsverlauf nach den Zahlenwerten der Tafel 3 dargestellt. Wie diese Kurve zeigt, fällt in dem hier untersuchten Bereich von 750 bis 980 $m\mu$ die Augenempfindlichkeit etwa im Verhältnis $10^6 : 1$ ab. Bei der äußersten noch beobachteten Wellenlänge $\lambda = 980 m\mu$ ist das Auge nur noch rund 10^{-10} mal so empfindlich wie bei Licht des Wahrnehmungsmaximums (555 $m\mu$), d. h. entsprechend dem dort geltenden Lichtäquivalent $P = 0,00144$ Watt/Lumen (vgl. Ann. 6, S. 244) ist bei

$\lambda = 980 m\mu$ eine monochromatische Strahldichte von etwa $3,2 \text{ kW/cm}^2$ erforderlich, um in diesem Spektralgebiet eine eben erkennbare Leuchtdichte von 10 asb

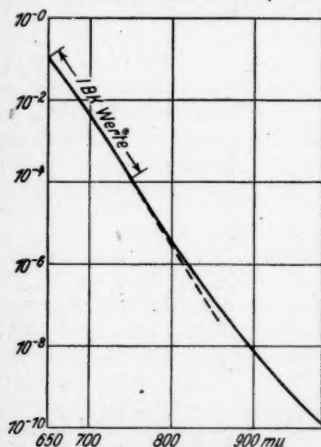


Abb. 5. Hellempfindlichkeit des Auges zwischen 650 und 980 $m\mu$ bezogen auf Maximalempfindlichkeit bei $\lambda = 555 m\mu$

zu erzeugen¹²⁾. Es ist bemerkenswert, daß das Auge trotz dieses enormen Empfindlichkeitsabfalls auch im ultraroten Gebiet noch mit deutlicher Farbwahrnehmung anspricht (vgl. S. 246).

Die obigen Zahlenwerte stellen, wie vorstehend geschildert, das Endergebnis wiederholter Korrektur einer zunächst nur extrapolierten Augenempfindlichkeitskurve durch schrittweise Angleichung der „Wahrnehmungsintegrale“ (S. 250) an die photometrischen Helligkeitswerte der verschiedenen Filter (Zahlentafel 2, S. 249) dar. Eine wie gute Übereinstimmung hierbei schließlich erzielt wurde, zeigt die nachfolgende Gegenüberstellung der Zahlentafel 4.

Zahlentafel 4

Flächenintegrale der Wahrnehmungskurven und zugehöriges Helligkeitsverhältnis verschiedener Ultrarotfilter

Filter:	Glasstärke:	Flächeninhalt der Wahrnehmungskurve in willk. Einheiten	Flächenverhältnis	Helligkeitsverhältnis nach Zahlentafel 2
UG 6	4 mm	0,26	1:14	1:13
UG 6	2 mm	3,84	1:3,67	1:3,45
RG 7	6 mm	14,1	1:15,4	1:15
RG 7	4 mm	217	1:1,56	1:1,54
UG 7	4 mm	338	1:340	1:380
RG 7	1,8 mm	114700		

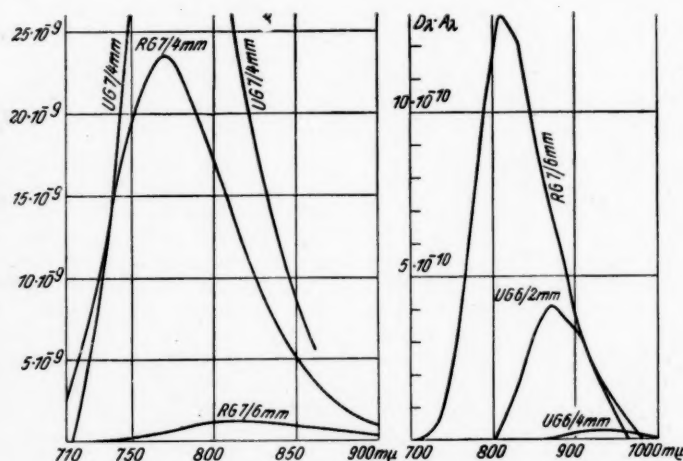


Abb. 6. Wahrnehmungskurven von Ultrarotfiltern

¹²⁾ Monochromatische Strahldichten solcher Größe sind technisch nicht herstellbar und würden Temperaturen von über 100000° entsprechen. Es ist daher aus dem Steilabfall der Augenkurve verständlich, daß die Emission einzelner Spektrallinien in diesem Gebiet (z. B. Hg bei λ 1,014 μ , vgl. Fußnote 10 S. 251) weit unter der Wahrnehmungsschwelle bleibt.

Die damit fixierten Wahrnehmungskurven sind in Abb. 6 zur Darstellung gebracht¹³⁾. Sie geben gemäß den oben gemachten Ausführungen (Abschn. II, S. 246) die spektrale Verteilung der hinter den einzelnen Filtern wahrgenommenen Lichtreize wieder. Der Wellenlängenbereich dieser Wahrnehmungskurven ist jeweils auf der kurzwelligen Seite durch die Steilheit der Filterabsorption, auf der langwelligen Seite durch den Abfall der Augenempfindlichkeitskurve begrenzt. Zwischen diesen Grenzen durchläuft jede Kurve ein für das gegebene Filter charakteristisches Maximum; die Halbwertsbreite der Verteilungskurven beträgt im Mittel etwa 100 $m\mu$.

Die Wahrnehmungskurven der helleren Filter (RG 7 und UG 7) liegen mit ihrem Maximum in der Nähe von 800 $m\mu$ und erstrecken sich mit einem Teil ihres Verlaufs noch ins sichtbare Gebiet unterhalb 760 $m\mu$. Bei dem 6 mm starken RG 7-Filter gehört das wahrgenommene Licht nahezu völlig dem ultraroten Wellenlängenbereich zwischen 760 und 900 $m\mu$ an. Die Wahrnehmungskurven der dunkelsten Filter (UG 6) liegen bei noch längeren Wellen zwischen 850 und 950 $m\mu$ und besitzen keine meßbaren Reizanteile mehr im sichtbaren Gebiet unterhalb 760 $m\mu$.

VI. Unmittelbare spektroskopische Beobachtung ultraroter Lichtreize

Wie im ersten Abschnitt dieser Untersuchung (S. 243) näher dargelegt wurde, ist wegen des außerordentlich steilen Abfalls der Augenempfindlichkeit eine Beobachtung von ultraroten Lichtreizen der Wellenlängen um 900 $m\mu$ und darüber im allgemeinen nur mit Ausfilterung größerer Wellenlängenbereiche ohne spektrale Zerlegung möglich. Die Strahlung des Gebiets zwischen 760 und 850 $m\mu$ jedoch kann unter geeigneten Bedingungen, d. h. mit Lichtquellen hinreichender Strahldichte und bei Benutzung lichtstarker Optik unmittelbar spektroskopisch sichtbar gemacht werden. Hiervon haben wir Gebrauch gemacht, um die spektrale Lage und Verteilung der rechnerisch ermittelten Wahrnehmungskurven (Abb. 6) durch direkte Beobachtung im Spektroskop zu kontrollieren.

Das geschah, wie in Abb. 7 veranschaulicht, in folgender Weise: Das Licht einer Bogenlampe *L* wurde durch einen Kondensor auf dem Spalt eines Hand-spektroskops *T* konzentriert, wobei sich im Strahlengang eine Kühlkuvette *K* befand, um eine unzulässige Erhitzung des Spektroskops zu vermeiden. Unmittelbar vor dem Spalt war das zu untersuchende Ultrarotfilter *B* angeordnet. Bei wirksamer Fernhaltung von Fremdlicht und genügender Adaptation des Auges konnte dann der vom Filter hindurchgelassene und im Auge noch wirksame Teil der Bogenlampenstrahlung als schwaches Rotlicht im Spektroskop beobachtet werden. Die Lage und spektrale Ausdehnung des wahrgenommenen ultraroten Lichts wurde auf einer im Gesichtsfeld des Spektroskops befindlichen, schwach beleuchteten Wellenlängenskala unmittelbar abgelesen.

Beobachtungen dieser Art ließen sich mit den Filtern RG 7 von 1,8 mm, 4 mm und 6 mm Stärke durchführen, während bei den dunkleren Gläsern (UG 6) der Lichtreiz zu schwach ist, um spektral zerlegt noch wahrgenommen zu werden.

¹³⁾ Der außerordentlich steile Abfall der Augenempfindlichkeitskurve bedingt es, daß die Ordinatenhöhe dieser Kurven beim Fortschreiten zu Filtern, deren Absorptionskante weiter im Ultraroten liegt, sehr schnell abnimmt. Es konnten daher in der Figur jeweils immer nur 2 oder 3 Kurven in gleichem Ordinatenmaßstab dargestellt werden (vgl. Fußnote 14 S. 255).

Bei den genannten RG 7-Filtern ergab die Wellenlängenablesung im Spektroskop volle Übereinstimmung der spektralen Lage der wahrgenommenen Ultrarot-helligkeit mit den rechnerisch gewonnenen Wahrnehmungskurven, und zwar lag bei dem 1,8 mm starken Filter das Maximum der wahrgenommenen Helligkeit bei $675 \text{ m}\mu^{14)}$. Das sehr viel dunklere Glas von 4 mm Stärke zeigt ein Helligkeitsmaximum bei $790 \text{ m}\mu$, wobei sich die wahrnehmbare Intensität etwa von 730 bis

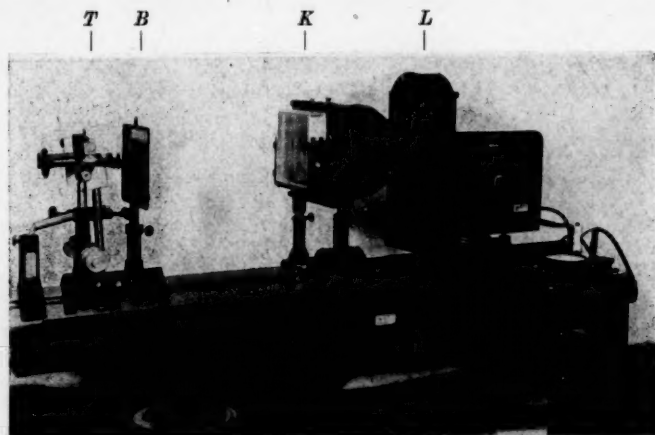


Abb. 7. Anordnung zur spektroskopischen Beobachtung ultraroter Lichtreize.

L Bogenlampe mit Kondensor, *K* Kühlkuvette,
B Ultrarotfilter, *T* Handspektroskop

$850 \text{ m}\mu$ erstreckt. Hinter dem 6 mm starken Filter ist der beobachtbare Spektralbereich entsprechend noch lichtschwächer und etwa um 30 bis $40 \text{ m}\mu$ nach längeren Wellen hin verschoben.

Diese unmittelbaren spektroskopischen Beobachtungen stellen eine wirksame Bestätigung der rechnerischen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit dar, auf Grund deren der oben in Zahlentafel 3 angegebene Verlauf der Augenempfindlichkeit festgelegt worden ist.

¹⁴⁾ Dies hellste der benutzten Filter gehört demnach im eigentlichen Sinn noch nicht zu den Ultrarotfiltern, sondern ist ein dunkles Rotglas (vgl. S. 250). Die rechnerisch erhaltene Wahrnehmungskurve dieses Filters ließ sich im Ordinatenmaßstab der Abb. 6 nicht zur Darstellung bringen und ist deshalb fortgelassen. Ihr rechnerischer Verlauf entspricht jedoch völlig der spektroskopischen Beobachtung.

Berlin-Karow, Optisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften,
Weida i. Thür., Deutsches Amt für Maß und Gewicht.

(Bei der Redaktion eingegangen am 24. November 1947.)

Zur Verbreiterung eines elektronenoptischen Strahlenbündels unter Einwirkung der Eigenladung

Von Georg Wendt

(Mit 3 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Bei den bisher bekannt gewordenen Berechnungen der Verbreiterung von Kathodenstrahlbündeln unter Einwirkung der eigenen Raumladung sind Bündel zugrunde gelegt worden, deren Strahlen ursprünglich entweder zueinander parallel verliefen oder auf einen mathematischen Punkt hin konvergierten. Eine solche Voraussetzung stimmt sehr oft nicht mit den wirklichen Verhältnissen überein. In der vorliegenden Arbeit wird daher ein den Gesetzmäßigkeiten der geometrischen Optik entsprechender Strahlverlauf zugrunde gelegt, wobei, abgesehen von der Eigenladung, feldfreier Raum und konstante Raumladungsverteilung über den Bündelquerschnitt angenommen werden. Es wird die Vergrößerung des Brennflecks gegenüber seinen Abmessungen berechnet, die sich aus geometrisch-optischen Gesetzmäßigkeiten ohne Berücksichtigung der Raumladung ergeben, sowie die durch die Raumladungseinwirkung hervorgerufene Verschiebung seiner Lage.

1. Einleitung und Problemstellung

Das Ziel eines jeden Kathodenstrahlröhrenbauers besteht meist in der Erreichung eines möglichst kleinen Elektronenbrennflecks von möglichst hoher Stromdichte. Diesem Ziel wirkt außer der Beschränkung durch die rein elektronenoptischen Gesetzmäßigkeiten und die Belastungsfähigkeit der Kathode¹⁾ auch die gegenseitige Abstoßung der Elektronen im Kathodenstrahlbündel entgegen. Schon im Frühstadium der Elektronenoptik haben sich daher mehrere Verfasser²⁾ mit der Berechnung der durch diese Abstoßung zustande kommenden Strahlverbreiterung befaßt; doch wurde stets von einem Strahlenbündel ausgegangen, dessen Elektronen beim Verlassen der Blende parallele oder homozentrische (auf einen mathematischen Punkt hin konvergierende) Bahnen beschreiben. In Wirklichkeit treffen bei den üblichen Kathodenstrahlröhren diese Annahmen auch nicht annähernd zu (dies ergaben z. B. die von E. Gundert angestellten, unveröffentlichten Versuche), so daß es lohnend erschien, die Strahlverbreiterung unter Zugrundelegung des wirklichen, durch die geometrisch-optischen Gesetzmäßigkeiten zustande kommenden Strahlverlaufs durchzurechnen.

¹⁾ Vgl. hierzu R. Law, Proc. IRE 25, 954 (1937); D. Langmuir, Proc. IRE 25, 977 (1937); E. Gundert, Z. techn. Physik 21, 246 (1940).

²⁾ E. E. Watson, Philos. Mag. 3, 849 (1927); M. Knoll u. E. Ruska, Ann. Physik (5), 12, 604 (1932); B. v. Borries u. J. Dosse, Arch. Elektrotechn. 32, 221 (1938).

In Abb. 1 ist ein solcher Strahlverlauf dargestellt, zunächst wenn die abstoßende Wirkung der Elektronen aufeinander vernachlässigbar klein ist. Außerdem ist ein feldfreier Raum angenommen, da die Berechnung der Strahlverbreiterung nur in diesem Fall zu einfach zu handhabenden Beziehungen führt. Das rotationssymmetrische Strahlenbündel verläßt die Blende an der Stelle $z = z_B$ (die z -Achse fällt mit der Strahlachse zusammen) und erreicht seinen kleinsten Querschnitt (den Brennfleck) an der Stelle $z = z_a$. Von jedem Punkt der Blenden-ebene geht ein Strahlenbüschel aus, das durch die Abmessungen des „Flecks“ begrenzt ist. Denjenigen in einer Meridianebene liegenden Strahl, der längs der Umhüllenden des Gesamtbündels verläuft, nennen wir einen „äußeren“ Strahl, denjenigen, der diametral gegenüberliegende Punkte der Blende und des Brennflecks verbindet, einen „inneren“ Strahl des Elektronenbündels. Die beiden Strahlen werden durch die Eigenladung des Strahls verschieden stark beeinflusst. Während der äußere

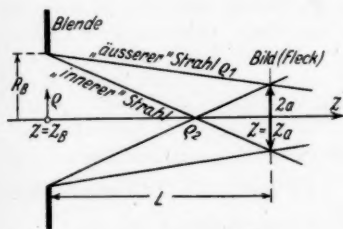


Abb. 1. Elektronenoptisches Strahlenbündel im feldfreien Raum bei fehlender Raumladungswirkung

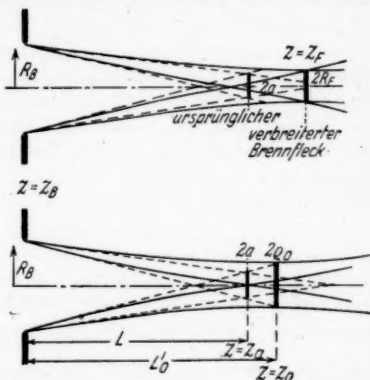


Abb. 2. Lage und Größe des verbreiterten Elektronenbrennflecks, oben bei relativ geringer, unten bei hoher Raumladung

Strahl dauernd unter dem Einfluß der gesamten Bündelladung steht, nimmt der Einfluß dieser Ladung auf den inneren Strahl immer mehr ab, je mehr er ins Strahlinnere vordringt; die Wirkung wird Null, wenn der innere Strahl die Achse schneidet, um dann auf der anderen Seite der Achse wieder zuzunehmen.

Die Differentialgleichung des äußeren Strahls und deren Lösung ist durch die Arbeit von Watson²⁾ bekannt. Die Berechnung soll jedoch im nächsten Abschnitt kurz rekapituliert werden, da deren Ergebnisse für die Berechnung der inneren Elektronenbahn und bei der weiteren Diskussion benötigt werden. In dem darauffolgenden Abschnitt soll dann der Verlauf eines „inneren“ Strahls berechnet werden, wobei eine über den Strahlquerschnitt konstante Raumladungsverteilung angenommen werden soll. Diese zur Vereinfachung der Berechnung gemachte Annahme trifft zwar nicht ganz zu (die Raumladung wird an den Rändern des Bündels nicht abrupt, sondern stetig abfallen), sie gestattet aber im Vergleich zu früheren Arbeiten einen tieferen Einblick in das Zustandekommen des verbreiterten Elektronenbrennflecks und liefert wesentlich bessere quantitative Ergebnisse.

Der Schnittpunkt des so berechneten „inneren“ mit dem „äußeren“ Strahl ergibt die Größe und die Lage des verbreiterten Elektronenbrennflecks, solange die Raumladung einen bestimmten kritischen Wert nicht übersteigt (vgl. Abb. 2).

Übersteigt sie diesen Wert, so sind Lage und Größe des Brennflecks nur durch den äußeren Strahl (durch seinen kleinsten Achsenabstand) bestimmt, und diese Werte sind die gleichen, wie sie Watson²⁾ seinerzeit angab.

Die Beziehungen zwischen dem so gefundenen verbreiterten Elektronenbrennfleck und Strahlstrom, Strahlspannung und den ursprünglichen Strahlendimensionen sollen dann zusammengefaßt und diskutiert werden.

2. Differentialgleichung und deren Lösung für den „äußeren“ Bündelstrahl

Wie bereits oben erwähnt, ist die Berechnung des äußeren Strahls bereits von Watson durchgeführt. Bei der nun folgenden kurzen Wiederholung beschränken wir uns auf nichtrelativistische Elektronengeschwindigkeiten (d. h. auf Beschleunigungsspannungen bis zu einigen 10^4 eV), was die Vernachlässigung der zusammenziehenden Wirkung der Stromfäden darstellenden Elektronenbahnen in sich schließt. Der Querschnitt des Kathodenstrahlbündels wird wie üblich als klein im Verhältnis zu seinen Längsabmessungen angenommen, so daß für den Außenraum und auch für das längs des Bündelmantels fliegende Elektron die ganze Raumladung als auf der Strahlachse (z-Achse) konzentriert angenommen werden kann. Die dort auf diese Weise entstehende konstante Liniendichte ist³⁾:

$$\lambda = \frac{i}{v} = \frac{i}{\sqrt{\frac{2e}{m} U}}, \quad (1)$$

wenn i der Strahlstrom, v die praktisch unveränderlich angenommene Axialkomponente der Elektronengeschwindigkeit, $\frac{e}{m}$ die spezifische Elektronenladung und U die gegen die Kathode gemessene Beschleunigungsspannung ist.

Auf ein im Abstand ϱ_1 von der Achse befindliches Elektron wirkt dann die radiale Kraft:

$$m \ddot{\varrho}_1 = e \cdot E_1 = e \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\varrho_1} = \frac{e \cdot K_1}{\varrho_1} \quad (2)$$

mit

$$K_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = \frac{i}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m} U}} = 3,04 \cdot 10^4 \cdot i \cdot U^{-\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

E_1 ist hierbei die Feldstärke am Ort des betrachteten Elektrons, $\epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^{11}$ Farad/cm die Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes. Punkte bedeuten Differentiationen nach der Zeit. In K_1 sind i und U im praktischen Maßsystem, also in Ampere bzw. Volt einzusetzen.

Die erste Integration von (2) liefert:

$$\dot{\varrho}_1 = \sqrt{\frac{2e}{m} \cdot K_1 \cdot \ln \frac{\varrho_1}{\varrho_0}}. \quad (4)$$

ϱ_0 ist eine Integrationskonstante, sie hat eine sinnfällige Bedeutung: Für $\varrho_1 = \varrho_0$ wird $\dot{\varrho}_1 = 0$, der Strahl verläuft hier parallel zur Achse. Im Fall sehr hoher Raumladung, wenn, wie in Abb. 2 unten dargestellt, die Größe des Brennflecks nur durch den äußeren Strahl bestimmt wird, bedeutet ϱ_0 den Radius dieses kleinsten Strahlbündelquerschnitts.

³⁾ Im praktischen Maßsystem.

Für die weitere Integration der Gl. (4) machen wir von der bei Gl. (1) verwendeten Annahme Gebrauch, daß die Axialkomponente der Elektronengeschwindigkeit praktisch unveränderlich ist:

$$\dot{z} = v = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot U. \quad (5)$$

Dividieren wir diesen Ausdruck durch Gl. (4) und integrieren, so ergibt sich:

$$z - z_B = \int_{R_B}^{q_1} \frac{dq_1}{\sqrt{\frac{K_1}{U} \cdot \ln \frac{q_1}{q_0}}} = K \cdot \int_{R_B/q_0}^{q_1/q_0} \frac{dr}{\sqrt{\ln r}} \quad (6)$$

mit

$$r = \frac{q_1}{q_0} \quad (7)$$

und

$$K = q_0 \cdot \sqrt{\frac{U}{K_1}} = 0,00575 \cdot q_0 \cdot U^{\frac{1}{2}} \cdot i^{-\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

wobei mit dem Index B die Anfangswerte (am Ort der Blende in Abb. 1) gekennzeichnet sind.

Dies ist die Bahn eines äußeren Elektrons. Statt der üblichen Veränderlichen r wollen wir, besonders im Hinblick auf die im folgenden Abschnitt durchzuführende Berechnung einer „inneren“ Bahn, eine neue Veränderliche s durch folgende Beziehung einführen:

$$s = \pm \sqrt{\ln r} = \pm \sqrt{\ln \frac{q_1}{q_0}}. \quad (9)$$

Für $q_1 = q_0$ wird also $s = 0$. Alle Werte von s , die im Sinne der Elektronenbewegung hinter diesem Punkt liegen, wollen wir positiv, die davor liegenden negativ rechnen. Mit dieser Veränderlichen erhalten wir statt Gl. (8) den Ausdruck:

$$z - z_B = 2K \cdot \int_{\sqrt{\ln \frac{q_1}{q_0}}}^{\sqrt{\ln \frac{q_1}{q_0}}} e^{s^2} ds. \quad (10)$$

$$\pm \sqrt{\ln \frac{R_B}{q_0}}$$

Das Integral ist in Jahnke-Emde, Funktionentafeln, tabuliert.

3. Differentialgleichung und deren Lösung für einen inneren Bündelstrahl

Wir wenden uns jetzt der Berechnung eines inneren Bündelstrahls zu. Auf ein Elektron, das sich im Abstand q_2 (vgl. Abb. 1) von der Achse befindet, wirkt nicht die ganze Ladung des Bündels, sondern nur ein Teil. Dieser Teil kann dadurch abgeschätzt werden, daß wir das Strahlenbündel angenähert von der Gestalt eines Kreiszylinders mit dem Radius q_1 um die Achse annehmen. In diesem Fall wirkt auf ein innerhalb des Bündels im Achsenabstand $q_2 < q_1$ befindliches Elektron nur derjenige Teil der Ladung, der vom Kreiszylinder mit dem Radius q_2 um die Strahlachse eingeschlossen ist. Diesen Teil denken wir

uns wieder auf der Strahlachse konzentriert. Die entsprechende Liniendichte λ_2 beträgt im Fall einer über den Bündelquerschnitt gleichmäßig verteilten Raumladung:

$$\lambda_2 = \lambda \cdot \frac{\pi \cdot \varrho_2^2}{\pi \cdot \varrho_1^2} = \lambda \cdot \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}. \quad (11)$$

Diese Ladung bewirkt am Ort des betrachteten Elektrons die Feldstärke E_2 :

$$E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_1^2} = K_1 \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_1^2}. \quad (12)$$

Die Kraft auf das Elektron ist also:

$$m \ddot{\varrho}_2 = e \cdot E_2 = e \cdot K_1 \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_1^2}. \quad (13)$$

Für die Ordinate ϱ_1 des äußeren Elektrons führen wir gemäß (9) ein:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \cdot e^{s^2} \quad (14)$$

und für den Operator $\frac{d}{dt}$ gemäß (4):

$$\frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot K_1 \cdot \sqrt{\ln \frac{\varrho_1}{\varrho_0}} \cdot \frac{d}{d\varrho_1} = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot K_1 \cdot \frac{e^{-s^2}}{2\varrho_0} \cdot \frac{d}{ds}. \quad (15)$$

Damit entsteht aus (13):

$$\frac{d^2 \varrho_2}{ds^2} - 2s \cdot \frac{d\varrho_2}{ds} - 2\varrho_2 = 0. \quad (16)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung läßt sich mit Hilfe des Fehlerintegrals⁴⁾:

$$\Phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-s^2} ds \quad (17)$$

folgendermaßen darstellen:

$$\varrho_2 = \alpha \cdot e^{s^2} \cdot [1 + \beta \Phi(s)]. \quad (18)$$

Durch (18) ist also zusammen mit (9) und (10) die Gleichung für die Bahn eines inneren Elektrons in Parameterform gegeben. Es bleibt nur noch die in den Gleichungen auftretenden Konstanten ϱ_0 , α und β durch der Messung zugängliche Größen auszudrücken.

4. Bestimmung der Integrationskonstanten

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten ziehen wir die mit den Bezeichnungen der Abb. 1 sich ergebenden Anfangswertbedingungen heran. Am Ort $z = z_B$ der Blende sind die Ordinaten des „äußeren“ und „inneren“ Strahls gleich dem Blendenradius R_B :

$$\varrho_{1B} = \varrho_{2B} = R_B. \quad (19)$$

⁴⁾ Tabulierung vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln.

Die Anfangsneigungen lassen sich durch den Radius a des Brennflecks bei ver-
schwindender Raumladung und dessen Abstand L vom Blendenort aus-
drücken (vgl. Abb. 1):

$$\left(\frac{d\varrho_1}{dz}\right)_{z=z_B} = -\frac{R_B - a}{L} \quad (20)$$

$$\left(\frac{d\varrho_2}{dz}\right)_{z=z_B} = -\frac{R_B + a}{L} \quad (21)$$

Nun folgt aus Gl. (14) und (10):

$$\frac{d\varrho_1}{dz} = \frac{d\varrho_1}{ds} \cdot \frac{ds}{dz} = 2s \cdot \varrho_0 \cdot e^{s^2} \cdot \frac{1}{2K \cdot e^{s^2}} = \frac{\varrho_0}{K} \cdot s \quad (22)$$

und aus Gl. (18) und (10):

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho_2}{dz} &= \frac{d\varrho_2}{ds} \cdot \frac{ds}{dz} = 2\alpha \left\{ s \cdot e^{s^2} \cdot [1 + \beta \cdot \Phi(s)] + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \right\} \cdot \frac{1}{2K \cdot e^{s^2}} \\ &= \frac{\alpha}{K} \left\{ s \cdot [1 + \beta \cdot \Phi(s)] + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-s^2} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Bezeichnen wir den Wert von s am Ort $z = z_B$ der Blende mit s_B :

$$s_B = \sqrt{\ln \frac{R_B}{\varrho_0}}, \quad (24)$$

so ist nach (20) und (22):

$$\frac{\varrho_0 s_B}{K} = -\frac{R_B - a}{L} \quad (25)$$

oder unter Berücksichtigung von (8)

$$\frac{\varrho_0}{R_B} = \exp \left[-3,30 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{R_B^2}{L^2} \cdot U^{\frac{3}{2}} \cdot i^{-1} \cdot \left(\frac{a}{R_B} - 1 \right)^2 \right]. \quad (26)$$

Aus (19), (18) und (14) ergibt sich weiter:

$$R_B = \alpha \cdot \frac{R_B}{\varrho_0} \cdot [1 + \beta \cdot \Phi(s_B)]$$

und daraus

$$\alpha = \frac{\varrho_0}{1 + \beta \cdot \Phi(s_B)}. \quad (27)$$

Aus den Gleichungen (21), (23), (25), (27) und (14) findet man andererseits:

$$\begin{aligned} -\frac{R_B + a}{L} &= \frac{\alpha}{K} \left\{ s_B \cdot [1 + \beta \cdot \Phi(s_B)] + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-s_B^2} \right\} \\ &= \frac{\varrho_0}{K} \cdot s_B + \frac{\varrho_0^2}{\sqrt{\pi} K \cdot R_B} \cdot \frac{\beta}{1 + \beta \cdot \Phi(s_B)} \\ &= -\frac{R_B - a}{L} + \frac{\varrho_0^2}{\sqrt{\pi} K \cdot R_B} \cdot \frac{\beta}{1 + \beta \cdot \Phi(s_B)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Es ist also:

$$\frac{\beta}{1 + \beta \cdot \Phi(s_B)} = - \frac{2\sqrt{\pi} a \cdot K \cdot R_B}{L \cdot \varrho_0^3} \quad (29)$$

$$= -0,0204 \cdot \frac{a}{L} \cdot U^{\frac{3}{4}} \cdot i^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp \left[3,3 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{R_B}{L} \right)^2 \cdot U^{\frac{3}{2}} \cdot i^{-1} \cdot \left(\frac{a}{R_B} - 1 \right)^2 \right] = -N$$

und

$$\beta = - \frac{N}{N \cdot \Phi(s_B) + 1}. \quad (30)$$

Aus (27) und (30) folgt schließlich:

$$\alpha = - \frac{N \cdot \varrho_0}{\beta} = \varrho_0 \cdot [1 + N \cdot \Phi(s_B)]. \quad (31)$$

Damit sind die Konstanten ϱ_0 , α und β auf die durch Messung feststellbare Größen R_B , a , L , U und i zurückgeführt.

5. Größe und Lage des verbreiterten Elektronenbrennflecks

Zunächst sei die Größe und die Lage des verbreiterten Brennflecks für den Fall sehr hoher Ladung angegeben, für den Fall also, daß der Außenstrahl noch vor dem Schnittpunkt mit dem Innenstrahl wieder von der Achse fort abbiegt (vgl. Abb. 2 unten). Die Größe dieses neuen Brennflecks ist nach Abschnitt 2 identisch mit der Integrationskonstanten ϱ_0 , deren Wert durch Gl. (26) gegeben ist. Seine Lage, d. h. sein Abstand L'_0 vom Blendenort $z = z_B$ bestimmt sich aus Gl. (10), indem dort für die laufende Koordinate ϱ der Wert ϱ_0 gesetzt wird. Man erhält:

$$L'_0 = z_0 - z_B = 2K \cdot \int_0^{\varrho_0} \frac{e^{s^2}}{\ln \frac{R_B}{\varrho_0}} ds. \quad (32)$$

Im Fall geringerer Raumladung (Abb. 2 oben) definiert der Schnittpunkt des Außen- mit dem Innenstrahl Größe und Lage des verbreiterten Brennflecks. Wir finden ihn, indem wir die entsprechenden Bahngleichungen (14) und (18) einander entgegengesetzt gleich setzen. Dabei sollen die auf den Brennfleck bezogenen Größen den Index F erhalten. Es ist also:

$$\varrho_1(z_F) = -\varrho_2(z_F) = R_F \quad (33)$$

oder

$$\varrho_0 \cdot e^{s_F^2} = -\alpha \cdot e^{s_F^2} \cdot [1 + \beta \cdot \Phi(s_F)] = R_F,$$

also mit (30) und (31):

$$\Phi(s_F) = -\frac{1}{\beta} \cdot \left(1 + \frac{\varrho_0}{\alpha} \right) = \frac{2}{N} + \Phi(s_B). \quad (34)$$

Durch $\Phi(s_F)$ ist auch s_F und damit auch R_F bestimmt. Beziehen wir den Halbmesser des verbreiterten Brennflecks auf seinen ursprünglichen Wert a (bei verschwindender Raumladung), so erhalten wir für die Fleckverbreiterung unter Berücksichtigung von (24)

$$\frac{R_F}{a} = \frac{\varrho_0}{a} \cdot e^{s_F^2} = \frac{R_B}{a} \cdot e^{s_F^2 - s_B^2}. \quad (35)$$

Der neue Abstand L' des verbreiterten Elektronenbrennflecks von der Blende ergibt sich aus Gl. (10) durch entsprechende Einsetzung der oberen Integrationsgrenze. Bezieht man ihn auf den Abstand L des ursprünglichen Brennflecks (bei verschwindender Raumladung), so wird bei Berücksichtigung von Gl. (25)

$$\frac{L'}{L} = - \frac{2 s_B \cdot e^{-\frac{s_B^2}{R_B}}}{1 - \frac{a}{R_B}} \cdot \int_{s_B}^{s_F} e^{s^2} ds. \quad (36)$$

Die Gleichungen (35) und (36) wurden numerisch ausgewertet und das Ergebnis in der Kurventafel Abb. 3 aufgetragen. Die Benutzung dieser Kurven-

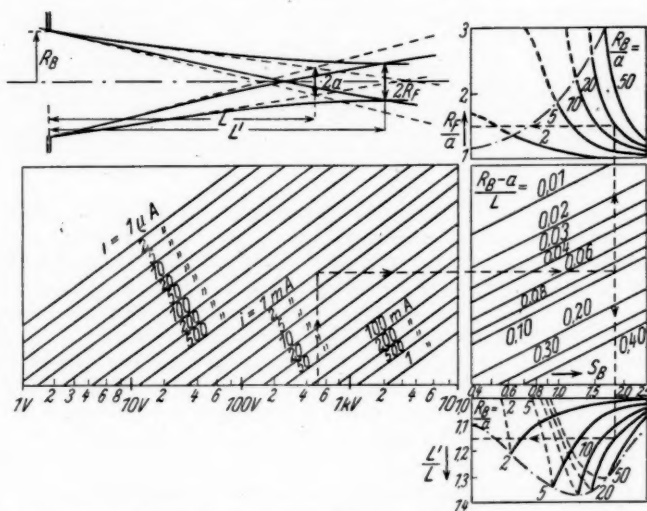


Abb. 3. Lage und Größe des verbreiterten Elektronenbrennflecks in Abhängigkeit von den Betriebsdaten. In den Kurventafeln rechts oben und rechts unten gehören die ausgezogenen Kurven zu geringerer, die gestrichelten zu höherer Raumladung (Bündelform Abb. 2 oben bzw. unten)

tafel wollen wir an einem Beispiel erläutern. Es soll die Vergrößerung des Gaußschen Elektronenbrennflecks für einen Fall mittelgroßer Raumladungsdichte festgestellt werden. Die Strahlspannung betrage 500 V, der Strahlstrom 1 mA, der Blendenradius R_B 4 mm, der durch geometrisch-optische Überlegungen ohne Berücksichtigung des Raumladungseinflusses berechnete Strahlhalbmesser a 0,2 mm, die ebenso berechnete Strahlänge L 40 mm.

Wir gehen vom Wert der Strahlspannung $U = 500$ V aus, die als Abszisse der linken Kurventafel aufgetragen ist, gehen von diesem Punkt senkrecht bis zum Schnittpunkt mit der gewünschten Stromgeraden $i = 1$ mA herauf und von dort waagrecht nach rechts in das daneben liegende Kurvenblatt bis zum

Schnittpunkt mit einer Geraden vom Parameterwert

$$\frac{R_B - a}{L} = \frac{4,0 - 0,2}{40} \approx 0,1.$$

Von diesem Schnittpunkt aus gehen wir einmal nach oben bis zur Kurve mit dem Parameterwert $\frac{R_B}{a} = \frac{4,0}{0,2} = 20$. An der Ordinatenachse lesen wir den Wert für die Fleckvergrößerung $\frac{R_P}{a} = 1,5$ ab. Da wir auf den ausgezogenen Teil der

Kurve $\frac{R_B}{a} = 20$ treffen, wird die Größe des Brennflecks durch den Schnittpunkt des äußeren mit dem inneren Strahl bestimmt (Fall Abb. 2 oben). Wären wir auf den gestrichelten Teil gekommen, so wäre der Brennfleck nur durch den äußeren Strahl begrenzt. Die beiden Gebiete sind voneinander durch einen strichpunktierten Kurvenzug getrennt.

Gehen wir vom Schnittpunkt in der mittleren Kurventafel rechts statt nach oben nach unten bis zu dem entsprechenden Parameterwert (an der ausgezogenen Kurve!), so lesen wir an der Ordinatenachse das Verhältnis der Abstände des Brennflecks von der Blende mit bzw. ohne Berücksichtigung der Raumladung ab: $\frac{L'}{L} = 1,15$.

Aus der Kurventafel ist folgendes zu entnehmen: In den meisten Fällen wird bei Problemen, ähnlich wie sie augenblicklich beim Entwurf von Braunschen Röhren auftreten, die Raumladung praktisch ohne Einfluß sein. Beim Entwurf von Strahlerzeugungssystemen möglichst hoher Leistung, also z. B. bei Laufzeitröhren, kann dagegen die Raumladung eine wesentliche Strahlverbreiterung und Fleckverschiebung verursachen. Eine Abstandszunahme um mehr als 37% kann allerdings laut dem in Abb. 3 rechts unten angebrachten Kurvenblatt nicht zustande kommen.

Château de Corbeville s/Orsay, S. et O.

(Bei der Redaktion eingegangen am 19. September 1947.)

Die Spannungs-Dehnungskurve ferromagnetischer Werkstoffe (Magnetomechanische Hystereseschleife)

Von Max Kornetzki

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Die Torsion eines weichen Nickelrohres wurde in Abhängigkeit von der Torsionsspannung bei zyklischem, absatzweise gesteigertem Drehmoment gemessen. Die beobachteten Beziehungen zwischen Dehnung und Spannung gleichen völlig denen, wie sie zwischen der magnetischen Induktion und der Feldstärke bestehen. Bei sehr geringen Amplituden gehorcht der ferromagnetische Stoff in mechanischer Hinsicht den Gesetzmäßigkeiten der magnetischen Rayleighschleife.

Die Lage der spontanen Magnetisierung in den Weißschen Bezirken eines Ferromagnetikums hängt sowohl von der durch den Gitterbau bestimmten Kristallenergie ab, wie auch von den im Realkristall vorhandenen Abweichungen vom Idealgitter. Diese Gitterverzerrungen werden gewöhnlich durch die inneren Gitterspannungen beschrieben; sie können sowohl von plastischen Verformungen wie auch von Einlagerungen nichtgelöster, insbesondere ausgeschiedener Stoffe herrühren. Unterwirft man den ferromagnetischen Stoff einer äußeren mechanischen Spannung, so wirkt in jedem Bezirk die aus der inneren und der äußeren Spannung resultierende Verzerrung. In allen Bezirken, in denen nicht eine der Hauptspannungen in Richtung der von außen angelegten Spannung liegt, wird sich das Spannungsellipsoid drehen. Bei geringer Kristallenergie wandert daher die Richtung tiefster Energie für die spontane Magnetisierung, während sich bei großer Kristallenergie der Energieunterschied zwischen den verschiedenen kristallographisch bedingten Lagen tiefster Energie des Magnetisierungsvektors (sog. leichte Richtungen) ändert. Während sich im ersten Fall der Magnetisierungsvektor in jedem Bezirk dreht, verschieben sich im zweiten Fall die Blochschs Wände zwischen den Bezirken mit verschiedenartig von der spontanen Magnetisierung besetzten leichten Richtungen. Pauschal neigt sich bei positiver Magnetostriktion die spontane Magnetisierung der Richtung einer von außen angelegten Zugspannung zu, während sie bei negativer Magnetostriktion einer zur äußeren Zugspannung senkrechten Lage zustrebt.

Die mit dieser Lageänderung der spontanen Magnetisierung ihrerseits verknüpfte Magnetostriktion wirkt stets in dem Sinne, daß der Werkstoff der äußeren Spannung mehr nachgibt, als er es bei festgehaltenen oder nichtvorhandener Magnetisierung tun würde. Ist bei sehr großer äußerer Spannung die gesamte spontane Magnetisierung ausgerichtet, so leistet der Werkstoff einer äußeren Spannung einen größeren Widerstand. Der Elastizitätsmodul eines ferromagne-

tischen Stoffes ist also bei kleiner äußerer Spannung geringer als bei sehr großer äußerer Spannung oder bei magnetischer Sättigung durch ein starkes Magnetfeld, eine als ΔE -Effekt bekannte Erscheinung.

Aus Stetigkeitsgründen konnte man annehmen, daß der Elastizitätsmodul als Funktion der äußeren Spannung von seinem bei sehr geringer Spannung gemessenen Anfangswert monoton gegen den Endwert bei großer Spannung streben sollte. Überraschend zeigten jedoch Messungen von Förster und Köster¹⁾, daß der Elastizitätsmodul ferromagnetischer Stoffe bei kleinen äußeren Spannungen geradlinig mit der Amplitude absinkt. Da andererseits kein Grund besteht, einen Anstieg des Elastizitätsmoduls bei größerer Spannung anzuzweifeln, konnte aus diesem Versuchsbefund nur der Schluß gezogen werden, daß der Elastizitätsmodul mit wachsender Spannung zunächst durch ein Minimum geht und dann seinem höheren Endwert zustrebt²⁾. Der reziproke Elastizitätsmodul (Dehnungskoeffizient) müßte also von seinem Anfangswert zunächst linear ansteigen und dann auf einen Endwert fallen, der unter dem Anfangswert liegt, ein Verlauf, der dem bekannten Verlauf der Permeabilität eines ferromagnetischen Stoffes in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke gleichen würde.

Begleitet wird der lineare Abfall des Elastizitätsmoduls von einem linearen Anstieg des Dämpfungsdekrementes mit der Schwingungsamplitude^{3) 1) 2)}. Dieser Verlauf gleicht dem Anstieg des Hystereseverlustwinkels eines ferromagnetischen Stoffes in Abhängigkeit von der Amplitude eines angelegten magnetischen Wechselfeldes. So lag der Schluß nahe, daß die Spannungs-Dehnungskurve eines Ferromagnetikums einem gleichartigen Gesetz gehorcht wie die Magnetisierungskurve. Insbesondere wurde vermutet, daß die Dehnung eines ferromagnetischen Stoffes in Abhängigkeit von der mechanischen Spannung bei kleinen Spannungen eine Rayleighkurve ist^{3) 5)}. Unter dieser Voraussetzung konnte das Versuchsergebnis nicht nur qualitativ gedeutet werden, sondern es wurde darüber hinaus ein zahlenmäßiger Zusammenhang zwischen dem Abfall des Elastizitätsmoduls und dem Anstieg des Dämpfungsdekrementes berechnet²⁾, der mit den Meßergebnissen im Einklang steht.

Die schon früher nachgewiesene⁶⁾ amplitudenabhängige Zusatzdämpfung eines mechanische Schwingungen ausführenden ferromagnetischen Stoffes rührt her von einer Hysterese der mechanisch ausgelösten Lageänderungen der spontanen Magnetisierung, die sich z. B. nach der Torsion eines ferromagnetischen Drahtes als remanente Torsion äußert, durch Anlegen eines Magnetfeldes oder Entmagnetisieren des Drahtes jedoch zum Verschwinden gebracht werden kann.

Ein weiterer Schritt war die Berechnung der mechanisch gefundenen Dämpfung aus rein magnetischen Werkstoffeigenschaften, die jedoch bisher nur größenordnungsmäßig gelang⁵⁾.

Bekannt ist ferner, daß die bereits erwähnte, scheinbar plastische, in Wirklichkeit jedoch magnetisch bedingte Remanenz nach Dehnung eines ferromagnetischen Stoffes quadratisch mit der Amplitude der vorangegangenen Dehnung ansteigt⁷⁾,

¹⁾ F. Förster u. W. Köster, Naturwiss. **25**, 436 (1937).

²⁾ M. Kornetzki, Wiss. Veröff. Siemens-Konzern **17**, 48 (1938).

³⁾ J. L. Snoek, Physica **8**, 745 (1941).

⁴⁾ W. Möbius, Z. Physik **35**, 806 (1934).

⁵⁾ M. Kornetzki, Z. Physik **121**, 560 (1943).

⁶⁾ R. Becker u. M. Kornetzki, Z. Physik **88**, 634 (1934).

⁷⁾ G. Richter, Ann. Physik 5. F., **32**, 683 (1938).

ein Befund, der dem quadratischen Remanenzanstieg der magnetischen Rayleighschleife gleicht.

Bei diesen Überlegungen und Deutungen wurde die magnetisch bedingte mechanische Rayleighschleife (kurz: magnetomechanische Rayleighschleife) also teils vermutet, teils nur in einigen ihrer Eigenschaften nachgewiesen, während der entscheidende Schritt, nämlich die unmittelbare Aufnahme der Spannungs-Dehnungskurve eines weichen Ferromagnetikums bei kleinen Spannungsamplituden noch ausstand. Um diese Lücke zu füllen, wurde der Torsionswinkel eines Rohres aus Carbylnickel in Abhängigkeit von dem Torsionsmoment gemessen. Dabei wurden jeweils vollständige Last-Dehnungsschleifen mit zwischen plus und minus in kleinen Sprüngen geänderten Drehmoment punktweise aufgenommen. Nach jeder Schleife wurde die Spitzenlast gesteigert.

Das Nickelrohr war 1 m lang, sein Außendurchmesser war 7 mm, der Innendurchmesser 6 mm. Es war bei 900° C eine Stunde in Wasserstoff geglüht und im Ofen gekühlt.

Da ein Teil der Meßergebnisse verlorengegangen ist, sollen hier nur die wichtigsten Ergebnisse zusammengestellt werden, während die Einzelheiten später mitgeteilt werden sollen.

Zur Erleichterung der Darstellung seien zunächst folgende Bezeichnungen eingeführt (siehe Abb.):

σ sei die im Werkstoff wirkende Schubspannung,

φ die Torsionsdehnung (Verdrehungswinkel der Mantellinie des Rohres),

$BDB'D'$ sei eine Spannungs-Dehnungskurve mit der Spitzenspannung OA und der Spitzendehnung AB .

Mit wachsender Spitzenspannung σ durchlaufe B die Kurve OBE . OFG sei die Tangente an diese Kurve im Punkte O (Anfangsteilheit), die die Linie AB im Punkte F schneidet. Der Winkel AOB werde als Schleifensteilheit bezeichnet; er entspricht dem Dehnungskoeffizienten.

Bei den Messungen wurden folgende Gesetzmäßigkeiten gefunden:

1. Die Spannungs-Dehnungsschleife ist bei Schubspannungen unter 0,1 kg/mm² nahezu strichförmig. Mit wachsender Spannung wird sie steiler und breiter. Bei Spitzenspannungen über 0,5 kg/mm² beginnt die Steilheit wieder abzunehmen. Die Verbindungslinie der Schleifenspitzen OBE (Kommutierungskurve) zeigt also dasselbe Bild wie eine magnetische Neukurve, wobei AB der Induktion, OA der magnetischen Feldstärke entspricht. Der Dehnungskoeffizient e Schleifensteilheit) steigt von einem Anfangswert e_a (Winkel AOF) ausgehend linear mit σ an,

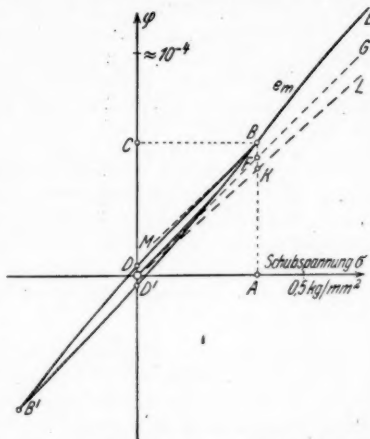


Abb. 1. Torsion eines weichen Nickelrohres in Abhängigkeit von der Torsionsspannung. $BDB'D'$ Schleife mit einer Spitzenspannung von $\approx 0,35$ kg/mm²; BM Tangente an BDB' im Punkt B ; OBE Verbindungslinie der Spitzen B bei steigender Spitzenspannung; OFG Tangente an OBE im Punkte O ; e_m Punkt des größten Dehnungskoeffizienten; OKL Kurve eines harten Nickelrohres

erreicht bei $\sigma \approx 0,5 \text{ kg/mm}^2$ einen Höchstwert $e_{\max} = 1,2 e_a$ und sinkt dann mit wachsender Spannung ab. Infolge einsetzender plastischer Fließvorgänge konnte nicht nachgewiesen werden, ob e einen Wert unter e_a erreicht.

2. Ein hartgezogenes Nickelrohr aus dem gleichen Werkstoff zeigt eine im gleichen Spannungsbereich kaum geöffnete Schleife mit einer Steilheit e_0 (Gerade OKL). Diese Gerade kann als Spannungs-Dehnungskurve ohne wesentlichen (oder wenigstens mit stark vermindertem) Einfluß der inneren ferromagnetischen Vorgänge angesehen werden, also im magnetischen Vergleich als die Magnetisierungskurve eines nichtferromagnetischen Stoffes bzw. des Vakuums. ($B = \mu_0 H$; μ_0 ist die Vakuump permeabilität.) Der Abschnitt BK entspricht also magnetisch der Magnetisierung $J = B - \mu_0 H$; der Winkel KOB ist der Suszeptibilität analog. Die Messungen ergaben, daß der Dehnungskoeffizient e_0 8% geringer ist als e_a (ΔE -Effekt). Bildet man an Stelle des Verhältnisses $e_{\max}:e_a$ das den Suszeptibilitäten entsprechende Verhältnis $(e_{\max} - e_0):(e_a - e_0)$, so ergibt sich der Wert 3 : 1.

e_a entspricht also im magnetischen Vergleichsbild der Anfangspermeabilität μ_a , e_{\max} ist der Maximalpermeabilität μ_{\max} äquivalent. Zum Vergleich sei erwähnt, daß bei weichem Nickel das Verhältnis $\mu_{\max}:\mu_a$ etwa 10 : 1 beträgt. Die magneto-mechanische Spannungs-Dehnungskurve OBE ist also viel weniger geschwungen als die Magnetisierungskurve eines weichen Ferromagnetikums; sie gleicht der Magnetisierungskurve eines Dauermagneten mit großer Koerzitivkraft und geringer Sättigungsmagnetisierung.

3. Die remanente Dehnung $\varphi_r = OD$ steigt bis zu einer Spitzenlast von $0,2 \text{ kg/mm}^2$ quadratisch mit σ , danach flacher an. Der bereits früher *) nachgewiesene Sättigungswert wurde bei dem hier untersuchten, sehr weichen Nickel durch plastisches Fließen verdeckt.

4. Die Remanenz ist praktisch gleich der Hälfte von FB . Im untersuchten Bereich schwankt das Verhältnis OD/FB zwischen 0,45 und 0,65.

Dieses Ergebnis deckt sich mit der bei der Rayleighschleife bekannten Beziehung zwischen Schleifenanstieg und Remanenz. Setzt man nämlich die Gleichung der magnetischen Kommutierungskurve im Rayleighbereich

$$B = \mu_a H + 2 \nu H^2,$$

so findet man infolge der Parabelform der Schleifenäste die magnetische Remanenz

$$B_r = \nu H^2,$$

gleichbedeutend mit dem mechanischen Meßergebnis.

5. Die reversible Steilheit des rücklaufenden Schleifenastes BM im Umkehrpunkt einer Spannungs-Dehnungsschleife ist im untersuchten Spannungsbereich innerhalb der Meßgenauigkeit gleich der Anfangsteilheit (OFG).

Dieser Befund deckt sich mit der an der magnetischen Rayleighschleife beobachteten Gleichheit zwischen reversibler und Anfangspermeabilität.

Ein Abfall der reversiblen Schleifensteilheit bei großen Spannungen — entsprechend der Gansschen Kurve eines Ferromagnetikums — wurde im untersuchten Bereich nicht beobachtet.

6. Schließlich wurde die Abhängigkeit des mechanischen Dämpfungsdekrementes von der Spannungs- bzw. Dehnungsamplitude untersucht. Dazu wurde auf bereits vorliegende Messungen an Carboneisen⁶⁾ zurückgegriffen, bei denen der zeitliche Verlauf von Torsionsschwingungen eines Drahtes aufgezeichnet worden war. Es zeigte sich, daß die Dämpfung mit wachsender Amplitude zunächst ansteigt — wie es auch Förster und Köster gefunden hatten —, bei einer Verdrehung $\varphi \approx 7 \cdot 10^{-3}$ jedoch einen Höchstwert von rund 0,16 erreicht und dann wieder absinkt. Diese magnetomechanische Zusatzdämpfung verschwindet, wenn man die Magnetisierung durch ein starkes Magnetfeld festhält.

Dieser Verlauf entspricht völlig dem des magnetischen Hystereseverlustwinkels in Abhängigkeit von der magnetischen Wechselfeldstärke.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß die bereits früher abgeleitete und durch Versuche bestätigte Beziehung zwischen dem Abfall des Elastizitätsmoduls mit der Amplitude und dem gleichzeitigen Anstieg des mechanischen Dämpfungsdekrementes magnetisch der Beziehung zwischen der Permeabilitätsänderung der Rayleighschleife mit der Amplitude des Wechselfeldes und dem Anstieg des magnetischen Hystereseverlustwinkels entspricht.

Diese Messungen bestätigen also vollumfänglich die bereits früher ausgesprochene Vermutung, daß die Spannungs-Dehnungskurve eines weichen ferromagnetischen Stoffes gleichartigen Gesetzmäßigkeiten gehorcht wie die Magnetisierungskurve. Bei sehr geringem mechanischen Spannungen gleicht die Spannungs-Dehnungskurve der magnetischen Rayleighschleife. Die theoretische Deutung des Zusammenhanges wurde bereits früher gegeben^{2) 5)}.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die hier beobachteten mechanischen Beziehungen nur an sehr weichen magnetischen Werkstoffen so deutlich ausgeprägt sein können und daher z. B. bei technischen Baustählen kaum nachweisbar in Erscheinung treten werden. Die näheren Bedingungen für das Auftreten der magnetomechanischen Rayleighschleife werden in einer späteren Mitteilung klargelegt.

Heidenheim-Mergelstetten, Steigstr. 22:

(Bei der Redaktion eingegangen am 31. Januar 1947.)

Über den Einfluß elektrostatischer Felder auf Licht nach J. Stark

Von P. Kunze und Liselotte Hohl

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Es wird die Nachprüfung einer von J. Stark 1946 mitgeteilten Erscheinung versucht, derzufolge Lichtstrahlen durch inhomogene elektrische Felder abgelenkt werden sollen. Mit unserer Anordnung gelingt es nicht, die genannte Lichtablenkung zu finden. Die in Frage stehende Erscheinung hängt mit einem anderen Problem zusammen, der Streuung von Licht an Licht, nach welcher früher von anderer Seite gleichfalls ohne Erfolg gesucht worden ist. Beide Effekte erfordern zu ihrer Beschreibung die Einführung quadratischer Glieder in die Maxwellgleichungen. Solche quadratische Glieder sind zwar von theoretischer Seite vorgeschlagen worden, werden aber erst bei sehr viel höheren Feldstärken wirksam, als man experimentell herstellen kann.

J. Stark hat im Herbst 1946¹⁾, sowie ausführlicher im Herbst 1947 private Mitteilungen über verschiedene Effekte veröffentlicht, nach denen ein Strahl von polarisiertem Licht durch ein inhomogenes elektrisches Feld beeinflusst werden soll, falls die elektrischen Vektoren von Licht und Feld parallel liegen.

Der eine dieser Effekte, der experimentell besonders einfach nachzuprüfen ist, soll auf folgender Erscheinung beruhen: Man schickt durch einen etwa 0,5 mm weiten Spalt einen polarisierten Lichtstrahl, dessen Polarisationsrichtung parallel zu den Spaltbacken liegt. Hinter dem Spalt treten dann die üblichen Interferenzstreifen auf. Legt man jetzt an die isolierten Spaltbacken eine möglichst große elektrische Spannungsdifferenz, so bildet sich zwischen den Spaltbacken ein stark inhomogenes elektrisches Feld aus, welches parallel zum \vec{E} -Vektor des Lichtes liegt; an den Spaltändern herrschten bei Stark etwa 2000 kV/cm. Als Ergebnis soll eine Verstärkung der Helligkeit der ersten und zweiten Ordnung des Beugungsbildes eintreten. Dreht man dagegen die Polarisationsrichtung um 90°, so daß der \vec{E} -Vektor des Lichtes senkrecht auf dem Spaltfeld steht, so ist bei Einschalten des Spaltfeldes kein Intensitätszuwachs im Beugungsbild zu beobachten.

Wir haben im vorigen Jahr diesen Effekt zu reproduzieren versucht, und dabei die in der Abbildung beschriebene Anordnung benutzt.

Als Lichtquelle diente der senkrechte Faden einer Glühlampe L ; das Licht wurde mit einem Polarisationsfilter P von Zeiss Ikon polarisiert. Direkt auf einer Öldiffusionspumpe von Leybold saß die Vakuumkammer K , in welcher, auf Bernstein montiert, der aus Rasierklingen-Bruchstücken gebildete Spalt lag. Beobachtet wurde visuell mit dem Fernrohr F . Symmetrisch gegen Erde wurde an die Spaltbacken eine Gleichspannung $+U/2$ und $-U/2$ gelegt, die aus zwei Hoch-

¹⁾ Auszugsweise in den Phys. Bl. 3, 162 (1947).

spannungstrafos durch Gleichrichter und Glättkondensator entnommen wurde. Durch Öffnen und Schließen des Erdungsschalters E konnte an den Spalt die Spannung U gelegt bzw. abgeschaltet werden. Das Vakuum in der Kammer wird auf größenordnungsmäßig 10^{-5} Torr geschätzt.

Die erreichbare Spannung ist durch das Einsetzen der autoelektronischen Entladung an den Spaltschneiden begrenzt; in der Praxis bei nicht extrem reinen und entgasen Schneiden beginnt sie unterhalb 10^7 Volt/cm. Durch die Feldemission werden die Schneiden rasch abgestumpft und angefressen; die Bernsteinisolation war durch kleine Schutzblechstreifen vor dem Bombardement durch Ladungsträger geschützt. Bezeichnet man den Radius der Rasierklingschneide mit r , die Spaltweite mit a , und ersetzt man zur bequemen Feldstärkeabschätzung die beiden Schneiden in erster Näherung durch zwei parallele Drähte vom Radius r im Abstand a , so ist an der Drahtoberfläche die Feldstärke $\mathcal{E}_0 \sim \frac{U}{2r \ln a/r}$, und die Feldinhomogenität

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\right)_0 = \mathcal{E}_0/r.$$

Unsere Klingen von ausgesucht bester Qualität, von denen jeweils nur ein aus der Mitte entnommenes Bruchstück als Spalt benutzt wurde, hatten gemäß mikroskopischer Ausmessung ein $r \sim 0,5$ bis 1μ , und die Spaltweite a wurde von 0,1 bis 0,5 mm variiert.

Unter diesen Umständen

setzte die Feldemission an den Spaltschneiden bei einer Spannung $U \sim 5$ bis 12 kV ein, entsprechend einer Oberflächenfeldstärke \mathcal{E}_0 (bei Drähten) von 9 bis $10 \cdot 10^6$ Volt/cm.

Obwohl also die Feldstärken an den Spalträndern eher noch größer waren als bei Stark, gelang es bei visueller Beobachtung in keinem Fall, die gesuchte Intensitätszunahme der Interferenzfransen bei Anschalten des Feldes zu bemerken; auf eine photographische oder photoelektrische Intensitätsmessung wurde deshalb verzichtet. E. Kappler hat gemeinsam mit Dr. Hartnagel²⁾ diesen Effekt gleichfalls ohne Erfolg zu reproduzieren versucht.

An unseren Spaltschneiden lagen Feldstärken $\mathcal{E}_0 \sim 10^7$ Volt/cm, und Feldinhomogenitäten $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\right)_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{r} \sim 10^{11}$ Volt/cm². Diese Werte sind klein gegenüber

denjenigen, die in den Atomen herrschen. Auf dem ersten Bohrschen Kreis des Wasserstoffatoms ($r = 0,528 \text{ \AA}$) erregt das Proton eine Feldstärke $\mathcal{E} = \frac{e}{r^2} =$

$$5,15 \cdot 10^6 \text{ Volt/cm, und eine Feldinhomogenität } \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} = \frac{2e}{r^3} = 1,96 \cdot 10^{18} \text{ Volt/cm}^2.$$

Wenn die Lichtquanten an unserem Spalt schon durch Felder von 10^7 V/cm bzw. 10^{11} V/cm² merklich abgelenkt würden, wäre es schwer zu verstehen, daß Wasser oder Glas optisch leer sind.

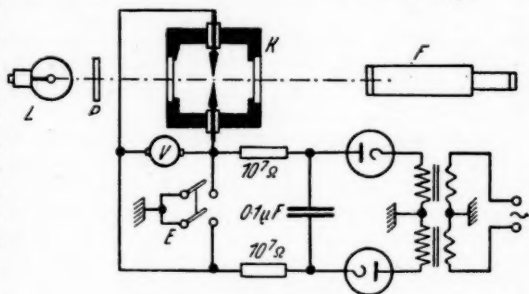


Abb. 1. Versuchsanordnung

²⁾ Phys. Bl. 3, 163 (1947).

Die Ablenkung von Photonen durch Vakuumfelder ist von Seiten der Theorie schon früher in Erwägung gezogen worden. Auf dem Boden der linearen Gleichungen der Elektrodynamik ist allerdings so ein Effekt nicht verständlich. Zu seiner Beschreibung ist es notwendig, für sehr hohe Feldstärken die Maxwellgleichungen durch quadratische Zusatzglieder zu ergänzen, so daß die Dielektrizitätskonstante des Vakuums eine Funktion der Feldstärke wird. M. Born³⁾ hat zur Vermeidung der unendlich großen Selbstenergie des punktförmig gedachten Elektrons tatsächlich die Einführung eines quadratischen Zusatzgliedes vorgeschlagen, und H. Euler⁴⁾ erhält auf anderer theoretischer Grundlage, ausgehend von der Paarerzeugung virtueller Lichtquanten, gleichfalls einen quadratischen Zusatz zu den Feldgleichungen, der innerhalb der dort verwendeten Näherung praktisch zahlengleich ist mit dem von Born. Diese Korrektur ist aber in der Umgebung der Einheitsladung erst bei Abständen von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \sim 10^{-13}$ cm wirksam, also bei Feldstärken, die millionenmal größer sind als die auf dem ersten Bohrkreis des H-Atoms. Wenn sich die linearen Gleichungen der Elektrodynamik im Atom bewähren, darf man dies bei den bescheidenen Feldstärken an unserem Rasierklingspalt um so eher erwarten.

Die Lichtablenkung durch Vakuumfelder steht im Zusammenhang mit der Frage nach der Kollision von Lichtquanten untereinander. L. de Broglie⁵⁾ hat 1926 den Vorschlag gemacht, bei der Kreuzung zweier Lichtbündel nach Zusammenstößen zwischen Lichtquanten, also nach gestreuten Photonen veränderter Wellenlänge zu suchen. L. Rosenfeld und E. Witmer⁶⁾ haben 1928 für das Lichtquantengas im spiegelnden Kasten die Rolle der Photonenzusammenstöße erörtert. Experimentell ist im gleichen Jahr von S. Vavilov⁷⁾, sowie 1930 von Hughes und Jauncey⁸⁾ sorgfältig nach Streu-Licht beim Kreuzen zweier intensiver Lichtbündel gesucht worden, aber ohne Erfolg.

Für die Streuung von Licht an Licht gilt die gleiche theoretische Grundlage wie bei der Ablenkung von Licht durch Vakuumfelder; sie erfordert ein quadratisches Zusatzglied in den Maxwell-Gleichungen. H. Euler (loc. cit.) hat die Wirkungsquerschnitte q für die Zusammenstöße von Lichtquanten untereinander berechnet, welche mit $q \sim 1/\lambda^6$ gehen, und er findet für sichtbares Licht Stoßquerschnitte von der Größenordnung $q \sim 10^{-72}$ cm². Dies ist hoffnungslos klein, denn die Experimente von Vavilov und von Hughes und Jauncey hätten bestenfalls nur ein $q > 10^{-20}$ cm² sicherstellen können.

Zusammenfassend ist also zu sagen, daß zwar solche quadratische Effekte wie die Lichtablenkung durch Vakuumfelder oder die Streuung von Licht an Licht an sich möglich sind; nach unseren theoretischen Kenntnissen ist aber zu vermuten, daß dies erst bei Feldstärken eintritt, die sich labormäßig nicht realisieren lassen. Der negative Ausfall derartiger Experimente steht damit im Einklang.

³⁾ Proc. Roy. Soc. London **143**, 410 (1934).

⁴⁾ Ann. Physik (5) **26**, 398, speziell 446 (1936).

⁵⁾ Ondes et Mouvements, Paris 1926, S. 96ff.

⁶⁾ Z. Physik **47**, 517 (1928).

⁷⁾ Siehe Notiz Physic. Rev. **36**, 1590 (1930).

⁸⁾ Physic. Rev. **36**, 773 (1930).

Rostock, Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 30. Januar 1948.)

Über Differentialgleichungen mit Invarianz gegenüber der Lorentzgruppe

Von Erwin Hardtwig

Inhaltsübersicht

Der Übergang von Inertialsystem zu Inertialsystem erfolgt durch solche Transformationen, die eine Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$ invariant lassen (Lorentztransformationen). Da diese Gleichung einen ausgearteten Kegelschnitt darstellt, ist es naheliegend von Transformationen auszugehen, die einen nichtausgearteten Kegelschnitt $\pm x(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2) + 1 = 0$ in sich überführen: projektive Gruppen (F. Klein). Physikalisch bedeutet dies die Annahme eines Raumes konstanter positiver oder negativer Krümmung statt des euklidischen Raumes. Die Liesche Gruppentheorie liefert die Hilfsmittel, alle bei gegebener Gruppe invar. Gleichungen und Differentialgleichungen zu finden und zu klassifizieren. Dies wird im euklidischen Fall für die Maxwell'schen Gleichungen und die Wellengleichung gezeigt. Es ist bemerkenswert, das sich als Wellengleichung genau jene ergibt, die der Diracschen Theorie entspricht, und zwar mit gewöhnlichen Funktionen, nicht Matrizen und Operatoren. Die Liesche Theorie läßt auch erkennen, warum Schrödingers Relativierung seiner Wellengleichung mißlingen mußte: der Ansatz erfolgte nicht so, wie es der zugehörigen „Erweiterung“ der Lorentzgruppe entsprechend gewesen wäre.

I.

Es ist längst eine selbstverständliche Forderung der Physik geworden, zu verlangen, daß jedes Naturgesetz so formuliert werde, daß es beim Übergang zu einem andern, gegenüber dem ersten geradlinig-gleichförmig bewegten Bezugssystem seine äußere Form bewahre. Da die Naturgesetze die Form von Differentialgleichungen besitzen, bedeutet dies, daß man verlangen muß, diese Differentialgleichungen mögen invariant sein gegenüber allen Transformationen, die den Übergang von einem Inertialsystem zu einem andern bewirken. Welcher Art diese Transformationen sind, hängt ganz davon ab, wie man einen „Grundvorgang“, etwa die Lichtausbreitung, definiert. Mögen $x_1, x_2, x_3, x_4 = ix_0 = ict$ die Koordinaten eines Weltpunktes in bezug auf ein Inertialsystem sein. Benutzt man alsdann zur Beschreibung des Vorgangs der Lichtausbreitung die Gleichung

$$M(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (1)$$

bzw.

$$D(x) \equiv dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2 = 0 \quad (2)$$

und fordert deren Invarianz, so werden die Transformationen linear-homogen und bilden eine 6-gliedrige Gruppe (Lorentzgruppe). Die Transformationen der

Lorentzgruppe haben darüber hinaus die Eigenschaft, den Ausdruck $M(x)$ bzw. $D(x)$ für sich invariant zu lassen.

Ausgehend von dieser „Fundamentalgruppe“ kann man nun trachten, sich einen Überblick über die Gesamtheit der Differentialgleichungen und des Systems von solchen zu verschaffen, die gegenüber allen Transformationen dieser Gruppe invariant bleiben. Unter den so gefundenen Gleichungen werden dann auch jene zu finden sein, welche Naturgesetze beschreiben. Nun ist es gewiß so, daß die Tensorrechnung eine Fülle von Funktionen — mit und ohne irgendwelche Differentialquotienten — liefert, die gegenüber ganz allgemeinen Transformationen — topologischen Abbildungen — invariant bleiben. Aber erstens weiß man nicht, ob dadurch alle invarianten Ausdrücke erfaßt werden, man weiß nicht, wie viele unabhängige in jedem Einzelfalle erwartet werden dürfen, man weiß vor allem auch nicht, ob man auf diese Weise alle invarianten Gleichungen bzw. Systeme von Gleichungen erfaßt und wie diese zu klassifizieren sind.

Aufstellung und Klassifikation aller invarianten Ausdrücke sowohl wie aller invarianten Gleichungen (Differentialgleichungen) und Systeme von Gleichungen (von Differentialgleichungen) bei vorgegebener Fundamentalgruppe liefert die Liesche Gruppentheorie und seine Theorie der Differentialinvarianten.

Dazu kommt noch Folgendes: Solange man den Vorgang der Lichtausbreitung in einem Inertialsystem durch die Gleichung (1) definiert, solange wird der Übergang von Inertialsystem zu Inertialsystem durch die linear-homogenen Lorentztransformationen vermittelt. Es liegt nun nahe, sich mit F. Klein¹⁾ auf den Standpunkt der projektiven Geometrie zu stellen und folgendermaßen zu argumentieren: Die Transformationen der Lorentzgruppe

$$\bar{x}_k = \sum_{\alpha=1}^0 a_{k\alpha} x_\alpha \quad (3)$$

bilden eine 6-gliedrige, zentro-affine Gruppe, jene nämlich, die nicht nur den Hyperkegel (1) invariant läßt, sondern auch jenes unendlich ferne Gebilde, das dieser aus dem unendlich fernen Raum herausschneidet. Bei Verwendung homogener Koordinaten $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y$ wird man also sagen können, daß die Lorentzgruppe das einfach ausgeartete Fundamentalgebilde 2. Ordnung

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0, y = 0$$

invariant läßt. Würde man an dessen Stelle ein nichtausgeartetes Fundamentalgebilde 2. Ordnung setzen, etwa

$$\pm \kappa (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 1 \equiv \pm \kappa (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2) + 1 = 0, \kappa = \text{const} \quad (4)$$

oder, homogen geschrieben,

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \pm \frac{1}{\kappa} y^2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_0^2 \pm \frac{1}{\kappa} y^2 = 0, \quad (4')$$

so hieße dies nicht nur, daß der Vorgang der Lichtausbreitung im Bezugsraum der x_1, x_2, x_3, x_4 durch (4) definiert wird, sondern auch, daß der Übergang von berechtigtem System zu berechtigtem System nunmehr durch die Transformationen der zugehörigen projektiven Gruppe besorgt wird. Die Transformationen dieser

¹⁾ Felix Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Berlin 1928.

Gruppe sind nicht mehr linear-homogen sondern linear-gebrochen von der Form

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{\alpha=1}^4 a_{k\alpha} x_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^4 a_{s\alpha} x_\alpha} \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

Für die Aufstellung der invarianten bzw. differentialinvarianten Ausdrücke und Gleichungen einer Gruppe ist es wichtig, die inf. Operatoren zu kennen, von denen die Transformationen der Gruppe erzeugt werden. Bezeichnet man — im Anschluß an die Liesche Schreibweise — den Operator $\partial/\partial x_r$ mit p_r , so wird die projektive Gruppe des „absoluten Kegelschnittes“ (4) erzeugt von den infinitesimalen Operatoren

$$\begin{aligned} D_1 &\equiv x_2 p_3 - x_3 p_2, & D_2 &\equiv x_3 p_1 - x_1 p_3, & D_3 &\equiv x_1 p_2 - x_2 p_1, \\ A_1 &\equiv x_1 p_0 + x_0 p_1, & A_2 &\equiv x_2 p_0 + x_0 p_2, & A_3 &\equiv x_3 p_0 + x_0 p_3, \\ X_1 &\equiv p_1 \pm \kappa x_1 U, & X_2 &\equiv p_2 \pm \kappa x_2 U, & X_3 &\equiv p_3 \pm \kappa x_3 U, \\ & & X_0 &\equiv p_0 \pm \kappa x_0 U \end{aligned} \quad (A)$$

wo $U \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_0 p_0$

ist also 10-gliedrig und enthält den durch keine zulässige Transformation zu entfernenden Parameter κ , das Krümmungsmaß des Raumes. Die „Erweiterung“ der Gruppe um die Variablen $\dot{x}_r = \frac{dx_r}{ds}$ zeigt dann, daß die einzige Differential-invariante in x und dx das nicht-euklidische Linienelement konstanter Krümmung

$$ds^2 = \frac{\frac{4}{1} dx_r^2 \left[1 \pm \kappa \frac{4}{1} x_r^2 \right] + \left(\frac{4}{1} x_\alpha dx_\alpha \right)^2}{\left[1 \pm \kappa \frac{4}{1} x_r^2 \right]^2} \quad (6)$$

ist. Schauplatz des physikalischen Geschehens wäre alsdann ein Raum konstanter positiver oder negativer Krümmung (ein elliptischer oder hyperbolischer Raum), je nachdem das Vorzeichen des κ plus oder minus ist.

Diese beiden Möglichkeiten stehen grundsätzlich gleichberechtigt neben der Möglichkeit, daß der Raum ein (pseudo)euklidischer sei. Die Aufstellung der Differentialinvarianten der zugehörigen projektiven Gruppe ist daher grundsätzlich ebenso berechtigt und sinnvoll wie die Aufstellung der Differentialinvarianten der Lorentzgruppe. Letztere hat nur den Vorzug für sich, historisch zuerst dagewesen zu sein, ein Vorzug, der das Grundsätzliche nicht berührt. Es sprechen im Gegenteil manche Umstände dafür, daß der Raum von Stellen mit Massenkonzentration abgesehen — ein Raum konstanten Krümmungsmaßes sei (wenn man nicht eine zeitliche Ausdehnung des Weltalls und damit eine Veränderlichkeit des Krümmungsradius annehmen will). Dem Fortschreiten von der Lorentzgruppe als Grundlage zu der ihr gegenüber invarianten Wellengleichung des Elektrons etwa oder zum System der Maxwell'schen Gleichungen entspricht dann gleichberechtigt das Fortschreiten von der projektiven Gruppe des nichteuklidischen Raumes als Grundlage zur entsprechenden Wellengleichung oder zu den Feldgleichungen der nichteuklidischen Elektrodynamik. Es ist bekannt, wie

schwierig es ist, sich einen Einblick in die Größenordnung des Krümmungsradius des Raumes zu verschaffen, falls der Raum tatsächlich gekrümmt sein sollte. Durch direkte Messungen im großen kommt man lediglich zu Abschätzungen über die mit den Messungen noch verträgliche Mindestgröße des Krümmungsradius — ein Nachweis für den euklidischen (bzw. pseudoeuklidischen) Charakter des Raumes ist grundsätzlich überhaupt nicht möglich. Vielleicht bietet sich hier nun die Möglichkeit, präzisere Angaben zu dieser Frage zu machen: das in die Wellengleichung und in die Elektrodynamik eingehende Krümmungsmaß ist möglicherweise auf dem Umweg über das Atom einer Messung zugänglicher als das in Geometrie und Astronomie eingehende.

Die größte Allgemeinheit ist damit aber noch nicht erreicht. Man kann als Transformationsgruppe, die den Übergang von berechtigtem System zu berechtigtem System vermittelt, allgemeiner jene reelle, kontinuierliche Gruppe — oder Gruppen — in 4 Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_0 wählen, die eine solche reelle Gleichung

$$\sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k = 0 \quad (7)$$

invariant läßt, die an einer festen Raumstelle allgemeiner Lage auf die Form (2) transformierbar ist und deren Determinante $|g_{ik}|$ nicht identisch verschwindet. Derartige Gruppen gibt es eine größere Anzahl und man schränkt die Möglichkeiten noch weiter ein, indem man zusätzlich fordert, daß die Gruppe die ∞^3 reellen Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt allgemeiner Lage möglichst allgemein, also mit möglichst vielen Parametern (in unserem Falle mit deren drei) transformiert. Nimmt man diese Einschränkung an, so kommen nach Lie²⁾ nur Gruppen mit 15, 11 und 10 Parametern als brauchbar in Frage.

Die 15-gliedrige Gruppe läßt sich durch reelle Punkttransformationen des R_4 stets auf die Form bringen

$$\begin{aligned} & p_1, p_2, p_3, p_0, U, \\ & D_1 \equiv x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad D_2 \equiv x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad D_3 \equiv x_1 p_2 - x_2 p_1 \\ & A_1 \equiv x_1 p_0 + x_0 p_1, \quad A_2 \equiv x_2 p_0 + x_0 p_2, \quad A_3 \equiv x_3 p_0 + x_0 p_3 \\ & T_1 \equiv 2 x_1 U - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2) p_1 \\ & T_2 \equiv 2 x_2 U - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2) p_2 \\ & T_3 \equiv 2 x_3 U - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2) p_3 \\ & T_0 \equiv 2 x_0 U - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2) p_0 \end{aligned} \quad (B)$$

Bekanntlich liefert die Gesamtheit aller Jacobischen Klammerrelationen, die man aus je zweien der inf. Operatoren bilden kann, die „Strukturrelationen“ der Gruppe. Durch Herstellen der Strukturrelationen lassen sich in unserem Falle sofort Untergruppen von (B) angeben (wenn man im allgemeinen auf diesem Wege auch nicht alle Untergruppen findet). Translationen für sich oder zusammen mit der Dehnung vom Ursprung aus, reelle Drehungen für sich und mit Translationen usw. bilden solche Untergruppen. Die Kenntnis der Struktur der Gruppe ist insofern bedeutungsvoll, als diese von Einfluß ist auf die Bauart der invarianten Gleichungssysteme und damit auch auf die Möglichkeit, diese zu integrieren. Die

²⁾ Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1930 (unveränderter Neudruck).

Existenz von Erhaltungssätzen geht auf das Vorhandensein von inf. Operatoren zurück, die das System gestattet.

Die 11-gliedrige Gruppe ist eine Untergruppe der eben genannten 15-gliedrigen und wird erzeugt von den 11 unabhängigen inf. Operatoren

$$\begin{array}{l} p_1, p_2, p_3, p_0, U \\ D_1 \equiv x_3 p_3 - x_3 p_2, \quad D_2 \equiv x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad D_3 \equiv x_1 p_2 - x_2 p_1, \\ A_1 \equiv x_1 p_0 + x_0 p_1, \quad A_2 \equiv x_2 p_0 + x_0 p_2, \quad A_3 \equiv x_3 p_0 + x_0 p_3, \end{array} \quad (C)$$

Sie besteht aus den „imaginären Drehungen“ im weiteren Sinne, den räumlichen und zeitlichen Translationen sowie den Dehnungen vom Ursprung aus.

Ist die Gruppe 10-gliedrig, so bestehen zwei Möglichkeiten:

a) die Gruppe ist durch reelle P. T. des R_4 ähnlich mit der Gruppe

$$\begin{array}{l} p_1, p_2, p_3, p_0, \\ D_1 \equiv x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad D_2 \equiv x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad D_3 \equiv x_1 p_2 - x_2 p_1, \\ A_1 \equiv x_1 p_0 + x_0 p_1, \quad A_2 \equiv x_2 p_0 + x_0 p_2, \quad A_3 \equiv x_3 p_0 + x_0 p_3. \end{array} \quad (D)$$

die ebenfalls eine Untergruppe der 15-gliedrigen Gruppe (B) und übrigens auch eine Untergruppe von (C) ist und sich aus Translationen und reellen und imaginären Drehungen zusammensetzt,

b) die Gruppe ist durch eine reelle P. T. des R_4 ähnlich mit der projektiven Gruppe des Gebildes (4), die bereits oben angeführt worden ist, und die sich aus (A) zusammensetzt.

Eine noch engere Auswahl ergibt sich, wenn man das Postulat durch das schärfere ersetzt, daß nicht das Gebilde (7), sondern der Ausdruck auf der linken Seite von (7) invariant bleiben soll — bei sonst übrigens unveränderten Nebenbedingungen. Aus der sinngemäßen Abänderung des Lieschen Theorems 28 geht nämlich hervor, daß nur zwei Gruppen dieses Postulat erfüllen: die 6-gliedrige Gruppe der imaginären Drehungen im weiteren Sinn (d. h. mit Einschluß der reellen Drehungen), also die Lorentzgruppe und die 10-gliedrige Gruppe des nichtausgearteten Kegelschnittes

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 - \frac{1}{\kappa} = 0.$$

Physikalisch gesprochen würde durch dieses Postulat der pseudo-euklidische und der pseudo-hyperbolische Raum als jene Räume ausgezeichnet, die fähig sind, Träger physikalischen Geschehens zu sein.

In allen Fällen interessieren die Differentialgleichungen bzw. die Systeme von solchen, die gegenüber der jeweiligen Gruppe invariant sind. Die Aufstellung der Wellengleichung des Elektrons und der Feldgleichungen der Elektrodynamik im Falle der Lorentzgruppe als Fundamentalgruppe kann man dabei als Paradigma für die Behandlung der andern Fälle betrachten.

II.

Die Lorentzgruppe wird erzeugt von den 6 unabhängigen Operatoren

$$\begin{array}{l} D_1 \equiv x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad D_2 \equiv x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad D_3 \equiv x_1 p_2 - x_2 p_1, \\ A_1 \equiv x_1 p_0 + x_0 p_1, \quad A_2 \equiv x_2 p_0 + x_0 p_2, \quad A_3 \equiv x_3 p_0 + x_0 p_3, \end{array} \quad (E)$$

unabhängig deswegen, weil zwischen ihnen keine Linearrelation der Form

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \dots + \lambda_6 A_3 = 0$$

mit konstanten, nichtverschwindenden Koeffizienten λ_r besteht. Daß drei Gleichungen

$$D_1 \equiv \frac{x_2}{x_1} A_3 - \frac{x_3}{x_1} A_2, \quad D_2 \equiv \frac{x_3}{x_2} A_1 - \frac{x_1}{x_2} A_3, \quad D_3 \equiv \frac{x_1}{x_3} A_2 - \frac{x_2}{x_3} A_1 \quad (8)$$

identisch in den x bestehen, hebt die Unabhängigkeit der Operatoren (E) nicht auf sondern bedeutet, daß sie miteinander gekoppelt (engl. connected) sind. Vom System

$$D_1 f = 0, D_2 f = 0, D_3 f = 0, A_1 f = 0, A_2 f = 0, A_3 f = 0$$

linearer, partieller Differentialgleichungen sind daher die drei ersten eine Folge der drei letzten; darüber hinaus bilden

$$A_1 f = 0, A_2 f = 0, A_3 f = 0 \quad (9)$$

ein vollständiges System, wie durch Bilden der Klammern $(A_1 A_2) = D_3 \dots$ ersichtlich ist. Es gestattet als einziges Integral den schon bekannten Ausdruck $M(x)$ in (1). Die Struktur der Lorentzgruppe ist aus der Tabelle

$$\begin{array}{lll} (D_2 D_1) = D_3 & (D_3 D_2) = D_1 & (D_1 D_3) = D_2 \\ (A_1 A_2) = D_3 & (A_2 A_3) = D_1 & (A_3 A_1) = D_2 \\ (A_1 D_1) = 0 & (A_1 D_2) = -A_1 & (A_1 D_3) = +A_2 \\ (A_2 D_1) = +A_3 & (A_2 D_2) = 0 & (A_2 D_3) = -A_1 \\ (A_3 D_1) = -A_2 & (A_3 D_2) = +A_1 & (A_3 D_3) = 0 \end{array} \quad (10)$$

ersichtlich, aus der hervorgeht, daß die inf. reellen Drehungen für sich eine Gruppe bilden, nämlich eine dreigliedrige Untergruppe von (E). Die imaginären Drehungen A_1, A_2, A_3 erzeugen im Gegensatz dazu keine Untergruppe. Dies hat eine wichtige Folge. Gewöhnlich wird die Lorentztransformation durch die folgende Matrix gegeben:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 1 + \frac{v_1^2}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & \frac{v_1 v_2}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & \frac{v_1 v_3}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & -\frac{v_1}{v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{v_2 v_1}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & 1 + \frac{v_2^2}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & \frac{v_2 v_3}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & -\frac{v_2}{v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{v_3 v_1}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & \frac{v_3 v_2}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & 1 + \frac{v_3^2}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) & -\frac{v_3}{v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ -\frac{v_1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{v_2}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{v_3}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right\} \quad (11)$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die Parameter v_1, v_2, v_3 , die hier die Rolle von Translationsgeschwindigkeiten spielen, die das ungestrichene System gegenüber dem gestrichenen hat, geben, mathematisch gesehen, Anlaß zu den imaginären inf. Drehungen A_1, A_2, A_3 , letztere gehören mit andern Worten zu jenen Parametern. Gerade diese Operatoren aber erzeugen keine Gruppe. Zwei Transformationen (11), nacheinander ausgeführt, lassen sich nicht durch eine Transformation derselben Bauart ersetzen, es wäre denn, man nimmt physikalisch völlig unsinnige Bindungen zwischen den Para-

metern in Kauf. Daraus geht aber hervor, daß das sogenannte Additionstheorem der Geschwindigkeiten im R_4 nicht ohne Beisein der Drehungsparameter formuliert werden kann: wenn es trotzdem im Falle des R_3 ein derartiges Additionstheorem gibt, so nur deshalb, weil es hier keine reelle Drehung als Untergruppe der Lorentzgruppe gibt, die hier allein aus der imaginären Drehung besteht. Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, daß man zumindest dort, wo Gruppen eine Rolle spielen, nicht ohne weiteres auf eine höhere Dimensionszahl verallgemeinern darf.

Soll es sich zunächst um die Aufstellung aller invarianten Wellengleichungen zweiter Ordnung mit einer Wellenfunktion Ψ handeln, so wird man die Lorentzgruppe um die ersten und zweiten Ableitungen der Wellenfunktion erweitern. Möge

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha} = \Psi_\alpha, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \Psi_{\alpha\beta} \quad (12)$$

gesetzt werden. Die Regeln für die Erweiterung einer Gruppe zeigen dann, daß die ersten Ableitungen der Wellenfunktion folgendermaßen infinitesimal transformiert werden:

$$\begin{aligned} \text{bei } A_1 \text{ gemäß } \bar{A}_1 &\equiv -\left(\Psi_1 \frac{\partial}{\partial \Psi_0} + \Psi_0 \frac{\partial}{\partial \Psi_1}\right), \text{ bei } D_1 \text{ gemäß } \bar{D}_1 \equiv \Psi_2 \frac{\partial}{\partial \Psi_3} - \Psi_3 \frac{\partial}{\partial \Psi_2}, \\ \text{bei } A_2 \text{ gemäß } \bar{A}_2 &\equiv -\left(\Psi_2 \frac{\partial}{\partial \Psi_0} + \Psi_0 \frac{\partial}{\partial \Psi_2}\right), \text{ bei } D_2 \text{ gemäß } \bar{D}_2 \equiv \Psi_3 \frac{\partial}{\partial \Psi_1} - \Psi_1 \frac{\partial}{\partial \Psi_3}, \\ \text{bei } A_3 \text{ gemäß } \bar{A}_3 &\equiv -\left(\Psi_3 \frac{\partial}{\partial \Psi_0} + \Psi_0 \frac{\partial}{\partial \Psi_3}\right), \text{ bei } D_3 \text{ gemäß } \bar{D}_3 \equiv \Psi_1 \frac{\partial}{\partial \Psi_2} - \Psi_2 \frac{\partial}{\partial \Psi_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Vertauschung der zweiten Ableitungen $\Psi_{\alpha\beta}$ erfolgt

$$\begin{aligned} \text{bei } A_1 \text{ gemäß } \bar{A}_1 &\equiv -\left[\Psi_{01} \frac{\partial}{\partial \Psi_{11}} - \Psi_{02} \frac{\partial}{\partial \Psi_{12}} - \Psi_{03} \frac{\partial}{\partial \Psi_{13}} - (\Psi_{11} + \Psi_{00}) \frac{\partial}{\partial \Psi_{10}}\right. \\ &\quad \left.- \Psi_{12} \frac{\partial}{\partial \Psi_{20}} - \Psi_{13} \frac{\partial}{\partial \Psi_{30}} - 2\Psi_{01} \frac{\partial}{\partial \Psi_{00}}\right], \\ \text{bei } A_2 \text{ gemäß } \bar{A}_2 &\equiv -2\Psi_{02} \frac{\partial}{\partial \Psi_{22}} - \Psi_{01} \frac{\partial}{\partial \Psi_{21}} - \Psi_{03} \frac{\partial}{\partial \Psi_{23}} - (\Psi_{22} + \Psi_{00}) \frac{\partial}{\partial \Psi_{20}} \\ &\quad - \Psi_{21} \frac{\partial}{\partial \Psi_{10}} - \Psi_{23} \frac{\partial}{\partial \Psi_{30}} - 2\Psi_{02} \frac{\partial}{\partial \Psi_{00}}, \\ \text{bei } A_3 \text{ gemäß } \bar{A}_3 &\equiv -2\Psi_{03} \frac{\partial}{\partial \Psi_{33}} - \Psi_{02} \frac{\partial}{\partial \Psi_{32}} - \Psi_{01} \frac{\partial}{\partial \Psi_{31}} - (\Psi_{33} + \Psi_{00}) \frac{\partial}{\partial \Psi_{30}} \\ &\quad - \Psi_{32} \frac{\partial}{\partial \Psi_{20}} - \Psi_{31} \frac{\partial}{\partial \Psi_{10}} - 2\Psi_{03} \frac{\partial}{\partial \Psi_{00}}, \\ \text{bei } D_1 \text{ gemäß } \bar{D}_1 &\equiv 2\Psi_{23} \frac{\partial}{\partial \Psi_{22}} - (\Psi_{22} - \Psi_{33}) \frac{\partial}{\partial \Psi_{33}} + \Psi_{31} \frac{\partial}{\partial \Psi_{21}} + \Psi_{30} \frac{\partial}{\partial \Psi_{02}} \\ &\quad - 2\Psi_{23} \frac{\partial}{\partial \Psi_{33}} - \Psi_{12} \frac{\partial}{\partial \Psi_{13}} - \Psi_{02} \frac{\partial}{\partial \Psi_{03}}, \\ \text{bei } D_2 \text{ gemäß } \bar{D}_2 &\equiv 2\Psi_{31} \frac{\partial}{\partial \Psi_{33}} - (\Psi_{33} - \Psi_{11}) \frac{\partial}{\partial \Psi_{31}} + \Psi_{12} \frac{\partial}{\partial \Psi_{32}} + \Psi_{01} \frac{\partial}{\partial \Psi_{03}} \\ &\quad - 2\Psi_{31} \frac{\partial}{\partial \Psi_{11}} - \Psi_{32} \frac{\partial}{\partial \Psi_{12}} - \Psi_{30} \frac{\partial}{\partial \Psi_{10}}, \\ \text{bei } D_3 \text{ gemäß } \bar{D}_3 &\equiv 2\Psi_{12} \frac{\partial}{\partial \Psi_{11}} - (\Psi_{11} - \Psi_{22}) \frac{\partial}{\partial \Psi_{12}} + \Psi_{23} \frac{\partial}{\partial \Psi_{13}} + \Psi_{02} \frac{\partial}{\partial \Psi_{10}} \\ &\quad - 2\Psi_{12} \frac{\partial}{\partial \Psi_{22}} - \Psi_{13} \frac{\partial}{\partial \Psi_{23}} - \Psi_{01} \frac{\partial}{\partial \Psi_{02}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die inf. Operatoren \bar{A}_ν, \bar{D}_ν erzeugen eine Gruppe, die mit der ursprünglichen Gruppe (E) holodrische isomorph ist. Dieser Umstand, zusammen mit der Tatsache, daß die \bar{A}_ν und \bar{D}_ν nicht nur unabhängig, sondern auch kopplungsfrei sind, hat zur Folge, daß das System $A_\nu f = 0, \bar{D}_\nu f = 0$ ($\nu = 1, 2, 3$) ein vollständiges System (in den 10 Variablen Ψ_{ik}) ist und daher $10 - 6 = 4$ unabhängige Lösungen, also auch 4 unabhängige invariante Gleichungen zuläßt. Nur die Lösung ersten Grades in den Ψ_{ik} interessiert. Die zugehörige invariante Gleichung ist

$$\Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_0^2} + k \Psi = 0. \quad (15)$$

Dies ist die feldfreie Wellengleichung. Um die Wellengleichung des Elektrons in einem elektromagnetischen Feld zu erhalten, muß um einen Vierervektor A^1, A^2, A^3, A^0 und dessen Ableitungen sowie um einen noch näher zu bestimmenden Sechservektor erweitert werden.

Der Vierervektor transformiert sich inf. gemäß den Operatoren

$$\begin{aligned} A_1^* &\equiv A^1 \frac{\partial}{\partial A^0} + A^0 \frac{\partial}{\partial A^1}, & D_1^* &\equiv A^2 \frac{\partial}{\partial A^3} - A^3 \frac{\partial}{\partial A^2}, \\ A_2^* &\equiv A^2 \frac{\partial}{\partial A^0} + A^0 \frac{\partial}{\partial A^2}, & D_2^* &\equiv A^3 \frac{\partial}{\partial A^1} - A^1 \frac{\partial}{\partial A^3}, \\ A_3^* &\equiv A^3 \frac{\partial}{\partial A^0} + A^0 \frac{\partial}{\partial A^3}, & D_3^* &\equiv A^1 \frac{\partial}{\partial A^2} - A^2 \frac{\partial}{\partial A^1}, \end{aligned} \quad (16)$$

und seine Ableitungen gemäß den Operatoren

$$\begin{aligned} \bar{A}_1^* &\equiv -(A_1^0 - A_1^1) \frac{\partial}{\partial A_1^1} - (A_1^0 - A_1^1) \frac{\partial}{\partial A_1^0} - A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_1^2} - (A_1^1 - A_1^0) \frac{\partial}{\partial A_1^0} \\ &\quad + (A_1^0 - A_1^1) \frac{\partial}{\partial A_1^0} - A_2^1 \frac{\partial}{\partial A_1^2} - A_3^1 \frac{\partial}{\partial A_1^3} + A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_1^2} - A_1^2 \frac{\partial}{\partial A_1^0} + A_3^0 \frac{\partial}{\partial A_1^3} \\ &\quad + A_1^2 \frac{\partial}{\partial A_1^0}, \\ \bar{A}_2^* &\equiv -(A_2^0 - A_2^2) \frac{\partial}{\partial A_2^0} + (A_2^2 - A_2^0) \frac{\partial}{\partial A_2^2} + A_3^2 \frac{\partial}{\partial A_2^3} + A_1^2 \frac{\partial}{\partial A_2^1} \\ &\quad + (A_2^0 - A_2^2) \frac{\partial}{\partial A_2^0} + (A_2^2 - A_2^0) \frac{\partial}{\partial A_2^2} + A_3^2 \frac{\partial}{\partial A_2^3} + A_1^2 \frac{\partial}{\partial A_2^1} - A_2^3 \frac{\partial}{\partial A_2^3} \\ &\quad - A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_2^3} - A_1^1 \frac{\partial}{\partial A_2^1} - A_1^0 \frac{\partial}{\partial A_2^1}, \\ \bar{A}_3^* &\equiv -(A_3^0 - A_3^3) \frac{\partial}{\partial A_3^0} - (A_3^0 - A_3^3) \frac{\partial}{\partial A_3^3} - A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_3^2} - A_1^0 \frac{\partial}{\partial A_3^1} \\ &\quad - (A_3^0 - A_3^3) \frac{\partial}{\partial A_3^0} + (A_3^3 - A_3^0) \frac{\partial}{\partial A_3^3} - A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_3^2} - A_1^0 \frac{\partial}{\partial A_3^1} - A_2^3 \frac{\partial}{\partial A_3^3} \\ &\quad - A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_3^3} - A_1^0 \frac{\partial}{\partial A_3^1} - A_1^2 \frac{\partial}{\partial A_3^1}, \\ \bar{D}_1^* &\equiv -(A_2^3 - A_2^2) \frac{\partial}{\partial A_2^2} + (A_2^2 - A_2^3) \frac{\partial}{\partial A_2^3} - A_1^1 \frac{\partial}{\partial A_2^1} - A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_2^0} \\ &\quad - (A_2^3 - A_2^2) \frac{\partial}{\partial A_2^2} + (A_2^2 - A_2^3) \frac{\partial}{\partial A_2^3} + A_1^1 \frac{\partial}{\partial A_2^1} + A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_2^0} - A_3^1 \frac{\partial}{\partial A_2^3} \\ &\quad + A_1^2 \frac{\partial}{\partial A_2^1} - A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_2^0} + A_2^0 \frac{\partial}{\partial A_2^0} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}_2^* &\equiv - (A_0^1 + A_1^0) \frac{\partial}{\partial A_3^0} - (A_1^1 - A_0^2) \frac{\partial}{\partial A_3^1} - A_2^1 \frac{\partial}{\partial A_3^2} - A_0^1 \frac{\partial}{\partial A_0^0} \\ &\quad + (A_0^3 - A_1^1) \frac{\partial}{\partial A_3^0} + (A_1^3 - A_0^2) \frac{\partial}{\partial A_3^1} + A_2^3 \frac{\partial}{\partial A_3^2} + A_0^3 \frac{\partial}{\partial A_0^0} - A_1^3 \frac{\partial}{\partial A_3^3} \\ &\quad + A_3^2 \frac{\partial}{\partial A_1^1} - A_1^0 \frac{\partial}{\partial A_3^0} + A_3^0 \frac{\partial}{\partial A_1^0} \\ \bar{D}_3^* &\equiv - (A_1^2 + A_2^1) \frac{\partial}{\partial A_1^1} - (A_2^2 - A_1^1) \frac{\partial}{\partial A_1^2} - A_3^2 \frac{\partial}{\partial A_3^1} - A_0^2 \frac{\partial}{\partial A_0^0} \\ &\quad + (A_1^1 - A_2^2) \frac{\partial}{\partial A_1^1} + (A_2^1 + A_1^2) \frac{\partial}{\partial A_1^2} + A_3^1 \frac{\partial}{\partial A_3^1} + A_0^1 \frac{\partial}{\partial A_0^0} - A_2^1 \frac{\partial}{\partial A_1^1} \\ &\quad + A_1^3 \frac{\partial}{\partial A_2^2} - A_0^2 \frac{\partial}{\partial A_1^0} + A_1^0 \frac{\partial}{\partial A_2^0} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Komponenten des Sechservektors sollen $a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$ sein. Sie transformieren sich infinitesimal entsprechend den Operatoren

$$\left. \begin{aligned} B_1 &\equiv + a_{20} \frac{\partial}{\partial a_{12}} + a_{30} \frac{\partial}{\partial a_{13}} + a_{12} \frac{\partial}{\partial a_{20}} + a_{13} \frac{\partial}{\partial a_{30}}, \\ B_2 &\equiv - a_{10} \frac{\partial}{\partial a_{12}} + a_{30} \frac{\partial}{\partial a_{23}} - a_{12} \frac{\partial}{\partial a_{10}} + a_{23} \frac{\partial}{\partial a_{30}}, \\ B_3 &\equiv - a_{10} \frac{\partial}{\partial a_{13}} - a_{20} \frac{\partial}{\partial a_{23}} - a_{13} \frac{\partial}{\partial a_{10}} - a_{23} \frac{\partial}{\partial a_{20}}, \\ C_1 &\equiv - a_{13} \frac{\partial}{\partial a_{12}} + a_{12} \frac{\partial}{\partial a_{13}} - a_{30} \frac{\partial}{\partial a_{20}} + a_{20} \frac{\partial}{\partial a_{30}}, \\ C_2 &\equiv - a_{23} \frac{\partial}{\partial a_{13}} + a_{12} \frac{\partial}{\partial a_{23}} + a_{30} \frac{\partial}{\partial a_{10}} - a_{10} \frac{\partial}{\partial a_{30}}, \\ C_3 &\equiv - a_{23} \frac{\partial}{\partial a_{13}} + a_{13} \frac{\partial}{\partial a_{23}} - a_{20} \frac{\partial}{\partial a_{10}} + a_{10} \frac{\partial}{\partial a_{20}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die gesamte Erweiterung der inf. Operatoren A_v und D_v führt also auf die Operatoren

$$\begin{aligned} X_v &\equiv \bar{A}_v + \bar{A}_v + A_v^* + \bar{A}_v^* + B_v \\ Y_v &\equiv \bar{D}_v + \bar{D}_v + D_v^* + \bar{D}_v^* + C_v \end{aligned} \quad (v = 1, 2, 3)$$

und zur Gewinnung aller invarianten Ausdrücke und Gleichungen (der ersten Lieschen Klasse; jene der übrigen Klassen mögen, als mehr oder weniger trivial, hier beiseite bleiben) hat man das vollständige System von 40 Variablen

$$X_v f = 0, \quad Y_v f = 0 \quad (v = 1, 2, 3) \quad (19)$$

zu integrieren, das demnach 34 unabhängige Lösungen zuläßt. Von diesen kann man eine ganze Reihe, wie etwa $\Delta \Psi - \Psi_{00}$ oder $\Sigma (\Psi_a)^2 - (\Psi_0)^2$ usw. unmittelbar angeben, auch

$$a_{10} \left(\frac{\partial A^3}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_3} \right) + a_{20} \left(\frac{\partial A^1}{\partial x_3} - \frac{\partial A^3}{\partial x_1} \right) + a_{30} \left(\frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} \right) + a_{23} \left(\frac{\partial A^0}{\partial x_1} + \frac{\partial A^1}{\partial x_0} \right) + \dots$$

ist eine solche. Es ist unmittelbar zu sehen, daß sich eine Lösung von (16) aus diesen unabhängigen Lösungen additiv zusammensetzen läßt. Bei entsprechender, hier nicht weiter zu erklärender Bezeichnungsweise (die sich an die in der Physik

übliche anschließt) kann man dann in

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{4\pi e}{\hbar c} i \left[(\mathfrak{M}, \text{Grad } \Psi) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] - \frac{4\pi}{\hbar^2} \left\{ m_0^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} (\mathfrak{V}^2 - V^2) \right\} \Psi - \frac{8\pi m_0}{\hbar^2} \left\{ \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} i (\mathfrak{b}, \mathfrak{e}) - \frac{e\hbar}{4\pi m_0 c} i (\mathfrak{a}, \mathfrak{h}) \right\} \Psi = 0 \quad (19)$$

eine lorentzinvariante Wellengleichung erkennen. Doch ist diese Gleichung weder die einzige, noch ist sie vollständig — man könnte noch eine ganze Reihe von Gliedern hinzufügen, ohne die Invarianz zu stören.

Bemerkenswert ist, daß diese Gleichung dieselbe ist wie jene der Diracschen Theorie, jedoch mit dem Unterschiede, daß man es hier nur mit gewöhnlichen Zahlen, nicht aber mit Matrizen und Operatoren zu tun hat. Die a_r und b_r spielen hier tatsächlich die Rolle von Richtungscosinus, während sie dort nur „gleichsam“ diese Bedeutung hatten. Vom Standpunkt der Lieschen Theorie aus ist auch erklärlich, warum der Schrödingersche Versuch, seine Wellengleichung zu relativisieren, mißglückte: die Art und Weise der „Erweiterung“ um das Viererpotential und seine Ableitungen war nicht sachgemäß, da zu eng, gewesen. Die hier gefundene Wellengleichung läßt ohne Schwierigkeit die Behandlung des Wasserstoffatoms zu. Es ist aber auch klar, wie man vorzugehen hat, wenn man 2 oder 4 Wellenfunktionen einzuführen hat. Man muß dann um die Ableitungen der zwei oder vier Wellenfunktionen erweitern und erhält als invariantes Gleichungssystem ein Simultansystem von zwei oder vier partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ein Rückgreifen auf die Diracschen Matrizen oder hyperkomplexen Zahlen wird dadurch vermieden — die Theorie des Elektrons ergibt sich ganz einfach aus der Invariantentheorie der Lorentzgruppe. Es ist durchaus möglich, daß sich auf diesem Wege die Unbehaglichkeiten vermeiden lassen, mit denen die Diracsche Theorie behaftet ist.

III.

Einen etwas anderen Weg muß man bei der Herleitung der Maxwell'schen Gleichungen aus der Lorentzgruppe einschlagen. Wiederum ohne auf die systematische Invariantentheorie im Rahmen dieses Aufsatzes einzugehen, erinnere ich an den folgenden Satz von Lie³⁾:

Das Gleichungssystem

$$\Omega_1(x_1 \dots x_n) = 0, \Omega_2(x_1 \dots x_n) = 0, \dots, \Omega_{n-m}(x_1 \dots x_n) = 0$$

gestattet dann und nur dann alle Transformationen der von den r unabhängigen inf. Operatoren X_1, X_2, \dots, X_r erzeugten r -gliedrigen Gruppe, wenn alle $r(n-m)$ Ausdrücke $X_\alpha \Omega_\beta$ vermöge der genannten Gleichungen verschwinden.

Da unter den Variablen auch Ableitungen verstanden werden und die inf. Operatoren auch die entsprechend erweiterten Operatoren sein können, gilt der Satz auch für differentialinvariante Gleichungen. Die angegebenen Bedingungen, die im allgemeinen die Form

$$X_\alpha \Omega_\beta = F_{\alpha\beta}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-m}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, r \quad \beta = 1, 2, \dots, n-m$$

annehmen, wo die F entsprechende Funktionen ihrer Argumente bedeuten, werden

³⁾ Es ist das die sinngemäße Abwandlung des Lieschen Theorems 14.

im Falle linearer Abhängigkeit — und eine solche soll hier gefordert werden, zu

$$X_\alpha \Omega_\beta = \sum_{\nu=1}^{n-m} \varrho_{\alpha\beta\nu} \Omega_\nu,$$

wo die $\varrho_{\alpha\beta\nu}$ nun Konstanten bedeuten. Um dies auf die Lorentzgruppe anzuwenden, ist diese einerseits um die Ableitungen eines Sechservektors (des elektromagnetischen Feldvektors) und andererseits um einen Vierervektor (den Viererstrom) zu erweitern und bei linearer Abhängigkeit nach den sie enthaltenden invarianten Gleichungen zu fragen.

Wie sich der Vierervektor transformiert, lehrt (16), nämlich genau so wie die Koordinaten. Sind seine Komponenten s^1, s^2, s^3, s^0 , so hat man in (16) nur die s^ν durch die s^μ zu ersetzen.

Bedeutend umständlicher transformieren sich inf. die Ableitungen des Sechservektors. Seien seine Komponenten

$$f_{10} = e_1, f_{20} = e_2, f_{30} = e_3, f_{12} = h_3, f_{31} = h_2, f_{23} = h_1. \quad (20)$$

Alsdann kann man sich überlegen, daß die Ableitungen $\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\beta} = e_\beta^{(\alpha)} \dots \dots$ dieser Größen sich inf.

$$\begin{aligned} \text{bei } A_1 \text{ gemäß } F_1 = & e_0^{(1)} \frac{\partial}{\partial e_1^{(1)}} - e_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial e_0^{(1)}} - (e_0^{(2)} - h_1^{(3)}) \frac{\partial}{\partial e_2^{(2)}} + h_2^{(3)} \frac{\partial}{\partial e_2^{(2)}} + h_3^{(3)} \frac{\partial}{\partial e_3^{(2)}} \\ & - (e_1^{(2)} - e_0^{(3)}) \frac{\partial}{\partial e_0^{(2)}} - (e_0^{(3)} + h_1^{(2)}) \frac{\partial}{\partial e_1^{(2)}} - h_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial e_2^{(3)}} - h_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial e_3^{(3)}} - (e_1^{(3)} + h_0^{(2)}) \frac{\partial}{\partial e_0^{(3)}} \\ & - h_0^{(1)} \frac{\partial}{\partial h_1^{(1)}} - h_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial h_0^{(1)}} - (e_1^{(3)} + h_0^{(2)}) \frac{\partial}{\partial h_1^{(2)}} - e_2^{(3)} \frac{\partial}{\partial h_2^{(2)}} - e_3^{(3)} \frac{\partial}{\partial h_3^{(2)}} \\ & - (e_0^{(3)} + h_1^{(2)}) \frac{\partial}{\partial h_0^{(2)}} - (h_0^{(3)} - e_1^{(2)}) \frac{\partial}{\partial h_1^{(2)}} + e_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial h_2^{(3)}} + e_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial h_3^{(3)}} - (h_1^{(3)} - e_0^{(2)}) \frac{\partial}{\partial h_0^{(3)}} \\ & \text{usf.,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bei } D_1 \text{ gemäß } G_1 = & -e_3^{(1)} \frac{\partial}{\partial e_2^{(1)}} + e_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial e_3^{(1)}} - e_1^{(3)} \frac{\partial}{\partial e_1^{(2)}} \\ & - (e_2^{(3)} + e_3^{(2)}) \frac{\partial}{\partial e_2^{(2)}} - (e_3^{(3)} - e_2^{(2)}) \frac{\partial}{\partial e_3^{(2)}} - e_0^{(3)} \frac{\partial}{\partial e_0^{(2)}} \\ & + e_1^{(2)} \frac{\partial}{\partial e_1^{(2)}} + (e_2^{(2)} - e_3^{(3)}) \frac{\partial}{\partial e_2^{(3)}} + (e_2^{(3)} + e_3^{(2)}) \frac{\partial}{\partial e_3^{(3)}} + e_0^{(2)} \frac{\partial}{\partial e_0^{(3)}} \\ & - h_3^{(1)} \frac{\partial}{\partial h_1^{(1)}} + h_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial h_3^{(1)}} - h_1^{(3)} \frac{\partial}{\partial h_1^{(2)}} - (h_2^{(3)} + h_3^{(2)}) \frac{\partial}{\partial h_2^{(2)}} - (h_3^{(3)} - h_2^{(2)}) \frac{\partial}{\partial h_3^{(2)}} - h_0^{(3)} \frac{\partial}{\partial h_0^{(2)}} \\ & + h_1^{(2)} \frac{\partial}{\partial h_1^{(3)}} + (h_2^{(2)} - h_3^{(3)}) \frac{\partial}{\partial h_2^{(3)}} + (h_3^{(2)} + h_2^{(3)}) \frac{\partial}{\partial h_3^{(3)}} + h_0^{(2)} \frac{\partial}{\partial h_0^{(3)}}, \dots \text{ usf.} \end{aligned} \quad (21)$$

transformieren. Die erweiterten, inf. Operatoren sehen mithin folgendermaßen aus:

$$F_\nu + S_\nu, \quad G_\nu + T_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3$$

wo die S_ν und T_ν die den Operatoren (16) entsprechenden Operatoren in den S^α sind.

Mit Hilfe eines linearen Ansatzes

$$\Omega \equiv C_{11} e_1^{(1)} + C_{12} e_2^{(1)} + \dots + C_{30} e_0^{(3)} + b_{11} h_1^{(1)} + \dots + C_1 S^1 + C_2 S^2 + C_3 S^3 + C_0 S^0 \quad (22)$$

ist nun das System

$$W_v \Omega \equiv (F_v + S_v) \Omega = C_v \Omega, \quad V_v \Omega \equiv (G_v + T_v) \Omega = C_v \Omega \quad (23)$$

$$C_v = \text{konst.}$$

zu integrieren. Schon die Substitution dieses Ansatzes in die erste der Gleichungen (für $v = 1$) und die Wahl $C_1 = 1$ (unter den beiden sich darbietenden Möglichkeiten $C_1 = \pm 1$) zeigt, daß Ω die Form hat

$$\Omega = (a_{11} e_1^{(1)} + a_{22} e_2^{(2)} + a_{33} e_3^{(3)} + c_0 s^0) + (b_{11} h_1^{(1)} + b_{22} h_2^{(2)} + b_{33} h_3^{(3)}) \\ - \{(a_{33} h_3^{(2)} - a_{22} h_2^{(3)} + a_{11} e_0^{(1)} + c_0 s^1) + (-b_{33} e_3^{(2)} + b_{22} e_2^{(3)} + b_{11} h_0^{(1)})\}.$$

Die Substitutionen in die übrigen Gleichungen zeigen dann weiter, daß es zweckmäßig ist, gewisse Ausdrücke — ich bezeichne sie mit

$$\begin{aligned} 0 - a_{22} h_2^{(3)} + a_{33} h_3^{(2)} + a_{11} c_0^{(1)} + c_0 s^1 &\equiv \mathfrak{R}_1, & 0 + b_{22} e_2^{(3)} - b_{33} e_3^{(2)} + b_{11} h_0^{(1)} &\equiv \mathfrak{M}_1, \\ a_{11} h_1^{(3)} + 0 - a_{33} h_3^{(1)} + a_{22} c_0^{(2)} + c_0 s^2 &\equiv \mathfrak{R}_2, & -b_{11} e_1^{(3)} + 0 + b_{33} e_3^{(1)} + b_{22} h_0^{(2)} &\equiv \mathfrak{M}_2, \\ a_{11} h_2^{(1)} - a_{22} h_1^{(2)} + 0 + a_{33} c_0^{(3)} + c_0 s^3 &\equiv \mathfrak{R}_3, & -b_{11} e_2^{(1)} + b_{22} e_1^{(2)} + 0 + b_{33} h_0^{(3)} &\equiv \mathfrak{M}_3, \\ a_{11} c_1^{(1)} + a_{22} c_2^{(2)} + a_{33} c_3^{(3)} + 0 + c_0 s^0 &\equiv \mathfrak{R}_0, & b_{11} h_1^{(1)} + b_{22} h_2^{(2)} + b_{33} h_3^{(3)} + 0 &\equiv \mathfrak{M}_0, \end{aligned} \quad (24)$$

für sich zu betrachten. In der Tat stellen die acht Gleichungen

$$\mathfrak{R}_v = 0, \quad \mathfrak{M}_v = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = a_{33} = a \\ b_{11} &= b_{22} = b_{33} = b \end{aligned} \quad (25)$$

$$v = 1, 2, 3, 0$$

ein System dar, für das die Voraussetzungen des oben angeführten Satzes von Lie zutreffen. Es bestehen nämlich die „Gruppenrelationen“

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline W_1 \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{M}_0 & W_1 \mathfrak{R}_2 = 0 & W_1 \mathfrak{R}_3 = 0 & W_1 \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{M}_1 \\ W_2 \mathfrak{R}_1 = 0 & W_2 \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{M}_0 & W_2 \mathfrak{R}_3 = 0 & W_2 \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{M}_2 \\ W_3 \mathfrak{R}_1 = 0 & W_3 \mathfrak{R}_2 = 0 & W_3 \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{M}_0 & W_3 \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{M}_3 \\ \hline W_1 \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{R}_0 & W_1 \mathfrak{M}_2 = 0 & W_1 \mathfrak{M}_3 = 0 & W_1 \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{R}_1 \\ W_2 \mathfrak{M}_1 = 0 & W_2 \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{R}_0 & W_2 \mathfrak{M}_3 = 0 & W_2 \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{R}_2 \\ W_3 \mathfrak{M}_1 = 0 & W_3 \mathfrak{M}_2 = 0 & W_3 \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{R}_0 & W_3 \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{R}_3 \\ \hline \end{array} \quad (26)$$

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline V_1 \mathfrak{R}_1 = 0 & V_1 \mathfrak{R}_2 = -\mathfrak{R}_3 & V_1 \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_2 & V_1 \mathfrak{R}_0 = 0 \\ V_2 \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_3 & V_2 \mathfrak{R}_2 = 0 & V_2 \mathfrak{R}_3 = -\mathfrak{R}_1 & V_2 \mathfrak{R}_0 = 0 \\ V_3 \mathfrak{R}_1 = -\mathfrak{R}_2 & V_3 \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1 & V_3 \mathfrak{R}_3 = 0 & V_3 \mathfrak{R}_0 = 0 \\ \hline V_1 \mathfrak{M}_1 = 0 & V_1 \mathfrak{M}_2 = -\mathfrak{M}_3 & V_1 \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_2 & V_1 \mathfrak{M}_0 = 0 \\ V_2 \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_3 & V_2 \mathfrak{M}_2 = 0 & V_2 \mathfrak{M}_3 = -\mathfrak{M}_1 & V_2 \mathfrak{M}_0 = 0 \\ V_3 \mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 & V_3 \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 & V_3 \mathfrak{M}_3 = 0 & V_3 \mathfrak{M}_0 = 0, \\ \hline \end{array} \quad (27)$$

aus denen hervorgeht, daß die rechten Seiten tatsächlich vermöge der Gleichungen (25) verschwinden. Dieselben Gruppenrelationen gelten auch für die Ausdrücke

$$M_v = \frac{1}{a} \mathfrak{M}_v, \quad N_v = \frac{1}{b} \mathfrak{R}_v, \quad v = 1, 2, 3, 0.$$

In ihnen tritt der Bruch $\frac{c_0}{a}$ auf, der, weil im System (23) die Koordinaten selbst nicht auftreten, als von ihnen abhängig angesehen werden darf. Er möge mit $\varrho(x)$ bezeichnet werden. Zu gleichem Ergebnis wäre man mit der Wahl $C_1 = -1$ gekommen. Es besteht somit der Satz:

Das System von part. Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{array}{l|l} N_1 \equiv 0 - h_2^{(3)} + h_3^{(2)} + e_0^{(1)} + \varrho s^1 = 0 & M_1 \equiv 0 + e_2^{(3)} - e_3^{(2)} + h_0^{(1)} = 0 \\ N_2 \equiv h_1^{(3)} + 0 - h_3^{(1)} + e_0^{(2)} + \varrho s^2 = 0 & M_2 \equiv -e_1^{(3)} + 0 + e_3^{(1)} + h_0^{(2)} = 0 \\ N_3 \equiv h_2^{(1)} - h_1^{(2)} + 0 + e_0^{(3)} + \varrho s^3 = 0 & M_3 \equiv -h_2^{(1)} + e_1^{(2)} + 0 + h_0^{(3)} = 0 \\ N_0 \equiv e_1^{(1)} + e_2^{(2)} + e_3^{(3)} + 0 + \varrho s^0 = 0 & M_0 \equiv h_1^{(1)} + h_3^{(2)} + h_2^{(3)} + 0 = 0 \end{array} \quad (28)$$

ist invariant gegenüber Lorentztransformationen. Darüber hinaus ist das Teilsystem, das die s^r enthält und das Teilsystem, das die s^r nicht enthält, für sich ein invariantes System.

Den zweiten Teil des Satzes erkennt man, wenn man die Gruppenrelationen (27) betrachtet: durch sie wird man weder aus dem Inbegriff der \mathfrak{R} , noch aus dem der \mathfrak{M} , hinausgeführt, ein Zeichen dafür, daß man es jedesmal mit einem System zu tun hat. Der tiefere Grund für diesen Zerfall des Systems der Maxwell'schen Gleichungen — denn als solche erkennt man die Gleichungen (28) sofort — liegt darin, daß die reellen Drehungen des Raumes eine Untergruppe der Lorentzgruppe bilden. In der Tat bilden auch die erweiterten inf. Operatoren V_r , die zu ihnen gehören, eine dreigliedrige Untergruppe der erweiterten Gesamtgruppe W_α , V_α . Es liegt hier ein Beispiel dafür vor, wie die Struktur der Gruppe, die zugrunde liegt, sich in der Bauart der Gleichungssysteme auswirkt, die bei ihr invariant bleiben.

Man kann jetzt umgekehrt, vom System ausgehend, fragen, welchen Integrationsvorteil die Kenntnis der Gruppe bildet, die das System gestattet. Es ist bekannt, daß die zehn sogenannten klassischen Integrale des Mehrkörperproblems ihre Existenz dem Umstand verdanken, daß die Differentialgleichungen der Dynamik eine zehngliedrige Gruppe gestatten. Etwas Ähnliches liegt hier vor: die Erhaltungssätze der Elektrodynamik haben ihre Wurzel in der Invarianz der Maxwell'schen Gleichungen gegenüber der Lorentztransformation. Daß man Erhaltungssätze aussprechen kann, darin liegt der Beitrag, den die Kenntnis der Gruppe des Systems zu dessen Integration liefert.

Stuttgart-Ost, Gänsheidestr. 19/1.

(Bei der Redaktion eingegangen am 26. Januar 1948.)

Bemerkung zu den Trägerbilanzgleichungen der Ionosphäre

Von R. Seeliger

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Auch bei einer Beschränkung auf die wichtigsten Elementarprozesse lassen sich die Trägerbilanzgleichungen des Ionosphärenplasmas nicht integrieren. Ihre Lösung wird im folgenden diskutiert nach ihrem qualitativen Verlauf, der sich weitgehend übersehen läßt. Es handelt sich dabei um das Abklingen der Trägerdichten nach dem Aufhören der äußeren ionisierenden Strahlung von einem vorgegebenen stationären Anfangszustand aus. Von Interesse ist insbesondere, wie sich hierbei das Mischungsverhältnis von Elektronen zu negativen Ionen ändert.

Die Bilanzgleichungen für die Trägerdichten in der Ionosphäre hat Massey¹⁾ schon vor fast zehn Jahren aufgestellt. Massey und dann Bates, Buckingham, Massey und Uwin²⁾ haben auch bereits versucht, wenigstens die Größenordnung der in diesen Gleichungen auftretenden Koeffizienten, d. h. die einzelnen Prozeßhäufigkeiten, abzuschätzen. Eine allgemeine Diskussion der Gleichungen für den stationären Zustand dürfte zur Zeit wenig ergiebig sein; es handelt sich dabei um die Auflösung von simultanen algebraischen Gleichungen, die zu unübersichtlichen Endformeln führt. Die nichtstationären Gleichungen, die das freie „Abklingen“ der Trägerdichten nach dem Aufhören der äußeren ionisierenden Strahlung beschreiben, sind ein System von drei bzw. zwei simultanen Differentialgleichungen, die zwar erster Ordnung, aber nicht linear sind. Sie allgemein und vollständig zu integrieren, ist nicht möglich und eine numerische Integration würde erst lohnend und aufschlußreich sein, wenn man über die genannten Koeffizienten genau Bescheid weiß. Bei dieser Sachlage wird man versuchen, sich über den Charakter der Lösungen durch gewisse allgemeine Überlegungen zu orientieren. In diesem Sinn sind die folgenden Ausführungen zu bewerten, aus denen sich immerhin einige nicht uninteressante Folgerungen ziehen lassen.

Die Raumdichten der Elektronen, negativen Ionen und positiven Ionen seien n_e , n_- und n_+ , die der affizierten Neutralteilchen, die nur als Proportionalitätsfaktor auftritt, sei n . Für die Elementarprozesse führen wir die folgenden Bezeichnungen und Benennungen ein

1. q = primäre Ionisation pro Volum- und Zeiteinheit durch die äußere Strahlung,

¹⁾ H. S. W. Massey, Negative Ions (Cambridge Physical Tracts Nr. 1, 1938); vgl. auch R. O. Kiepenheuer; Journ. d'Astrophysique 8, 210 (1945).

²⁾ H. S. W. Massey, Proc. Roy. Soc. London 163, 542 (1937); D. R. Bates u. a., Proc. Roy. Soc. London 170, 322 (1939).

2. (aJ) = Photoabspaltung (durch die äußere Strahlung) eines Elektrons von einem negativen Ion pro Ion und sec,

3. $(\Re n)$ = Stoßabspaltung (durch Stoß gegen ein Neutralteilchen) eines Elektrons von einem neg. Ion pro Ion und sec,

4. (βn) = Anlagerung eines Elektrons an ein Neutralteilchen pro Elektron und sec,

5. α_e = Rekombinationskoeffizient der Elektronenrekombination Elektron + pos. Ion,

6. α_j = Rekombinationskoeffizient der Ionenrekombination neg. Ion + pos. Ion.

Diese Liste der Elementarprozesse ist zwar durchaus noch nicht vollständig, enthält aber die wichtigsten Prozesse und dürfte zur Beschreibung des Sachverhaltes vorläufig genügen.

Die Trägerbilanzgleichungen für den stationären Zustand haben dann die Form

$$\left(\frac{dn_e}{dt}\right) = 0 = q + n_- \{(aJ) + (\Re n)\} - n_e (\beta n) - n_e n_+ \alpha_e \quad (1)$$

$$\left(\frac{dn_-}{dt}\right) = 0 = -n_- \{(aJ) + (\Re n)\} + n_e (\beta n) - n_- n_+ \alpha_j \quad (2)$$

$$\left(\frac{dn_+}{dt}\right) = 0 = q - n_e n_+ \alpha_e - n_- n_+ \alpha_j \quad (3)$$

Sie sind wegen der Neutralitätsbedingung $n_+ = n_e + n_-$ nicht unabhängig voneinander, sondern es folgt aus zweien von ihnen jeweils die dritte. Wir führen deshalb an Stelle der drei Variablen n_e , n_- und n_+ als abhängige Variable ein n_e und $\lambda = n_-/n_e$, setzen also $n_- = \lambda n_e$ und $n_+ = (1 + \lambda) n_e$, auf die sich die obigen Gleichungen unmittelbar umschreiben lassen.

Zur Zeit $t = 0$ mögen nun die ionisierenden Strahlungen plötzlich aufhören zu wirken; es soll also von da ab $q = (aJ) = 0$ sein. Es setzt dann das freie Abklingen ein, das nun abläuft gemäß den Gleichungen

$$\frac{dn_e}{dt} = +n_- (\Re n) - n_e (\beta n) - n_e n_+ \alpha_e = n_e \{\lambda (\Re n) - (\beta n)\} - n_e^2 (1 + \lambda) \alpha_e \quad (1a)$$

$$\frac{dn_-}{dt} = \frac{d(\lambda n_e)}{dt} = -n_e (\Re n) + n_e (\beta n) - n_- n_+ \alpha_j = -n_e \{\lambda (\Re n) - (\beta n)\} - n_e^2 \lambda (1 + \lambda) \alpha_j \quad (2a)$$

$$\frac{dn_+}{dt} = \frac{d(1 + \lambda) n_e}{dt} = -n_e n_+ \alpha_e - n_- n_+ \alpha_j = n_e^2 (1 + \lambda) (\alpha_e + \lambda \alpha_j) \quad (3a)$$

Es erfolgt von den Anfangswerten n_{e0} , n_{-0} und n_{+0} bzw. n_{e0} und λ_0 aus, wie sie durch die Gln. (1)–(3) gegeben sind. Die Diskussion führen wir zunächst durch für den Fall $\alpha_j = 0$, für den sich die Sachlage wesentlich vereinfacht. Diese Vereinfachung ist jedoch nicht nur formaler Art, sondern physikalisch bedingt dadurch, daß ohne Ionenrekombination aus der Reaktionsfolge Elektron \rightarrow negatives Ion (Anlagerung) \rightarrow Elektron (Photo- und Stoßabspaltung) keine negativen Ionen abgezweigt werden; es handelt sich deshalb um einen geschlossenen Zyklus, der für die Elektronenbilanz als solcher keine Rolle spielt.

Aus den Gln. (1a)–(3a) läßt sich sofort ablesen: Es ist für alle Zeiten $dn_+/dt < 0$, d. h. $n_+(t)$ nimmt monoton ab. Es ist für $t = 0$ $dn_e/dt < 0$ und $dn_-/dt > 0$, d. h. die $n_e(t)$ -Kurve beginnt fallend, die $n_-(t)$ -Kurve hingegen

steigend. Die beiden letzteren Aussagen folgen sofort, wenn man in (1a) bzw. (2a) die stationären Werte der Variablen einsetzt. Unmittelbar ergibt sich dann aus $\lambda = n_-/n_+$, daß anfangs $d\lambda/dt > 0$ ist, daß die $\lambda(t)$ -Kurve steigend beginnt. Wir haben also zusammengefaßt

$$\frac{dn_+}{dt} < 0; \quad \left(\frac{dn_+}{dt}\right)_0 < 0; \quad \left(\frac{dn_-}{dt}\right)_0 > 0; \quad \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0 > 0. \quad (4)$$

Da nun wegen $n_+ = n_e + n_-$ stets $n_- < n_+$ bleiben muß, kann sich die $n_-(t)$ -Kurve niemals über die $n_+(t)$ -Kurve erheben. Dies zwingt zu der weiteren Forderung, daß $n_-(t)$ durch ein Maximum gehen muß. Von der Vereinfachung $\alpha_j = 0$ haben wir dabei noch keinen Gebrauch gemacht; es gelten also die Aussagen (4) und daß $n_-(t)$ durch ein Maximum gehen muß allgemein. Von jetzt ab hingegen beschränken wir uns zunächst auf die Diskussion der Gleichungen, die aus (1)–(3) und (1a)–(3a) für $\alpha_j = 0$ entstehen. Aus (2a) ergibt sich, daß n_- ansteigt, solange $\lambda < (\beta n)/(\Re n)$ ist, und sein Maximum erreicht für $\lambda = (\beta n)/(\Re n)$. Andererseits können wir aus (2) entnehmen, daß

$$\lambda_0 = \frac{(\beta n)}{(\Re n) + (a J)} \quad \left(< \frac{(\beta n)}{(\Re n)} \right) \quad (5)$$

ist, und ferner aus (1a) und (2a) durch Elimination von dn_e/dt und Auflösung nach $d\lambda/dt$, daß

$$\frac{d\lambda}{dt} \geq 0, \text{ wenn } \lambda \leq \frac{(\beta n)}{(\Re n) - n_e \alpha_e} \quad \left(> \frac{(\beta n)}{(\Re n)} \right). \quad (6)$$

Fassen wir alles dies zusammen, so können wir nun also die ausgezogenen Teile der Abb. 1 zeichnen, die natürlich lediglich den Charakter der Abklingkurve x und

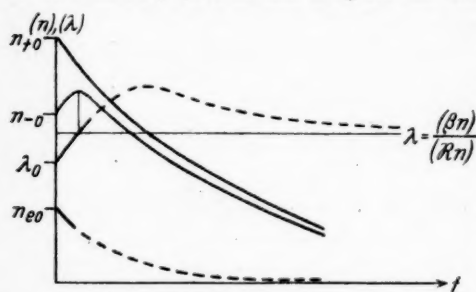


Abb. 1. Abklingkurven für $a_j = e$

keinerlei Maßstabsverhältnisse wiedergeben soll. Weil $n_-(t)$ durch ein Maximum gehen muß, das bei $\lambda = (\beta n)/(\Re n)$ liegt, und weil λ ein Maximum erst bei einem Wert $\lambda > (\beta n)/(\Re n)$ erreichen würde, können wir die $\lambda(t)$ -Kurve sicher noch etwas über $\lambda = (\beta n)/(\Re n)$ hinaus ansteigend fortsetzen. Wie sie dann weiter verläuft, ob monoton ansteigend oder durch ein Maximum gehend, können

wir aus den bisherigen Überlegungen noch nicht erschließen. Um hierüber etwas aussagen zu können, ist eine weitere Diskussion der Gln. (1a)–(3a) erforderlich.

Wir untersuchen dazu das Verhalten ihrer Lösung für sehr große Werte von t , d. h. für $n_e \rightarrow 0$. (Die Annahme eines monotonen Abklingens von n bis zu 0 darf man wohl ohne weiteres machen aus physikalischen Gründen und gestützt auf die Meßergebnisse, z. B. bei Sonnenfinsternissen.) Zunächst wollen wir annehmen, daß λ endlich bleibt für $n_e \rightarrow 0$. Dann würden für genügend kleines n_e dn_e/dt und dn_+/dt verschiedenes Vorzeichen haben, es sei denn, daß mit $n_e \rightarrow 0$ auch $\lambda(\Re n) - (\beta n) \rightarrow 0$ wird, und zwar von derselben Größenordnung wie n_e . Andererseits würden, wenn λ unendlich groß würde mit $n \rightarrow 0$, ebenfalls die Vor-

zeichen der beiden Ableitungen verschieden sein und sie würden zudem unendlich groß werden, wenn $n_e^2 \lambda$ endlich bliebe. Vernünftig ist also offenbar nur die Annahme $\lambda \rightarrow \frac{(\beta n)}{(\Re n)}$ für $n_e \rightarrow 0$. Damit ist dann zwangsläufig verbunden, daß λ durch ein Maximum geht und wir demgemäß die (t) -Kurve so ergänzen müssen, wie dies in der Abbildung punktiert geschehen ist.

Die Durchführung von Überlegungen derselben Art für den allgemeinen Fall $\alpha_j > 0$ ist komplizierter. Wir können uns jedoch die Diskussion erleichtern und gewisse Schwierigkeiten umgehen durch Verwertung der Annahme, daß sich die Sachlage nicht grundsätzlich unterscheiden wird von der für $\alpha_j = 0$ und in diese kontinuierlich übergehen wird mit $\alpha_j \rightarrow 0$. Wie schon erwähnt, bleiben nach wie vor bestehen die Folgerungen (4) und deshalb auch, daß $n_-(t)$ durch ein Maximum unterhalb der $n_+(t)$ -Kurve gehen muß. Von hier ab jedoch ändern sich die Verhältnisse.

Es steigt nun n_- an, solange

$$(\beta n) > \lambda (\Re n) + n_e \lambda (1 + \lambda) \alpha_j$$

ist und erreicht sein Maximum, wenn

$$\lambda = \lambda' = \frac{\beta n}{(\Re n) + n_e (1 + \lambda) \alpha_j} \quad (7)$$

ist. Es ist also der zu $dn_-/dt = 0$ gehörende Wert von $\lambda = \lambda'$ nun $< (\beta n)/(\Re n)$. Die Gl. (6) nimmt die Form an

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) \geq 0 \quad \text{wenn} \quad \lambda \leq \frac{\beta n}{(\Re n) - n_e \alpha_e + n_e \alpha_j} = \lambda_m, \quad (8)$$

aber es ist hierbei jetzt folgendes zu beachten. Für $\alpha_j = 0$ war auf jeden Fall $\lambda_m > (\beta n)/(\Re n)$, während dies jetzt durchaus nicht gewährleistet ist, sondern davon abhängt, ob α_j größer oder kleiner als α_e ist. Wie aus (8) zu ersehen ist, würde sein

$$\lambda_m \geq \frac{(\beta n)}{(\Re n)} \quad \text{wenn} \quad \alpha_j \leq \alpha_e. \quad (9)$$

Andererseits aber bleiben die früheren Überlegungen gültig, die dazu geführt hatten, daß sich λ mit zunehmendem t dem Endwert $(\beta n)/(\Re n)$ nähert. Für $\alpha_j > \alpha_e$ würde also die Existenz eines Maximums der $\lambda(t)$ -Kurve dazu führen, daß dieses Maximum unterhalb von $(\beta n)/(\Re n)$ läge und die Kurve dann nochmals zu dem Endwert $(\beta n)/(\Re n)$ aufsteigen müßte, was offenbar nur bei einem wellenartigen Verlauf möglich sein würde. Dies legt nahe, daß $\lambda(t)$ für $\alpha_j > \alpha_e$ überhaupt kein Maximum besitzt, sondern monoton zu dem Endwert ansteigt. Es ist das zunächst natürlich nur eine Vermutung auf Grund der ganzen physikalischen Situation, aber sie läßt sich noch wesentlich stützen und so eine befriedigende Klärung herbeiführen. Für $\alpha_j = \alpha_e$ lassen sich nämlich die Abklinggleichungen allgemein und vollständig integrieren. Das Ergebnis ist ein monotoner Anstieg von $\lambda(t)$ vom stationären Anfangswert λ_0 an zu dem Endwert $(\beta n)/(\Re n)$. Setzen wir in (1a) und (2a) $n_e = y$ und $\lambda n_e = z$, so lauten diese Gleichungen ($\alpha_j = \alpha_e = \alpha$)

$$\frac{dy}{dt} = z \cdot (\Re n) - y \cdot (\beta n) - (y^2 + yz) \alpha \quad (1a)$$

$$\frac{dz}{dt} = -z (\Re n) + y (\beta n) - (z^2 + yz) \alpha, \quad (2a)$$

Ihre Addition gibt

$$\frac{d(y+z)}{dt} = -(y+z)^2 \alpha$$

und die Lösung dieser Gleichung ist

$$(y+z) = \frac{1}{\alpha t + c}$$

Dies in (1a) eingesetzt gibt für y die Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{\alpha t + c} - y \right) (\Re n) - y (\beta n) + y \frac{\alpha}{\alpha t + c},$$

die sich nach bekannten elementaren Methoden sofort lösen läßt, woraus dann auch $z(t)$ sich ergibt. Mit den Abkürzungen

$$t' = t + \frac{c}{\alpha} \quad A = [(\beta n) + (\Re n)] \quad B = \frac{1}{\alpha} \frac{(\Re n)}{[(\beta n) + (\Re n)]}$$

lassen sich die Lösungen darstellen in der Form

$$y = \frac{1}{t'} (B + c' e^{-At'}); \quad z = \frac{1}{\alpha t'} - y$$

und es wird demnach

$$\lambda = \frac{z}{y} = \frac{1}{\alpha (B + c' e^{-At'})} - 1. \quad (10)$$

Dies gibt für $t = \infty$

$$\lambda_{\infty} = \frac{1}{\alpha B} - 1 = \frac{(\beta n)}{(\Re n)}.$$

Offenbar ist demnach die zu $\alpha_j = \alpha_e$ gehörende λ -Kurve gerade die Grenzkurve zwischen den Kurven mit und ohne Maximum. Wir werden ferner annehmen dürfen, daß das Maximum mit zunehmendem α_j sich zu größeren Zeiten hin verschiebt und für $\alpha_j = \alpha_e$ bis zu $t = \infty$ gelangt ist.

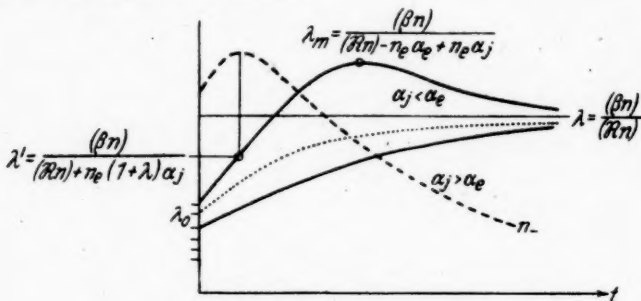


Abb. 2. Verlauf von $\lambda(t)$ für $\alpha_j \neq 0$

Eine Ergänzung dieses Bildes können wir noch erhalten durch die Anfangswerte λ_0 , die sich in der zu erwartenden Weise einfügen (Abb. 2). Die vollständige algebraische Auflösung der stationären Gln. (1) — (3) nach n_e und λ führt zu unübersichtlichen Endformeln — die sechs Konstanten, nämlich q , (βn) , $(\Re n)$.

(aJ), α_j und α_e enthalten —, aber es genügt, die folgenden Fälle zu betrachten, wo man die Sachlage sofort übersehen kann:

$$\begin{array}{ll} \alpha_j = 0 & \lambda_0 = \frac{(\beta n)}{[(\Re n) + (aJ)]} \\ \alpha_j = \alpha_e (= \alpha) & \lambda_0 = \frac{(\beta n)}{[(\Re n) + (aJ)] + \sqrt{q\alpha}} \\ \alpha_j \rightarrow \infty & \lambda_0 \rightarrow 0. \end{array}$$

Der erste Wert ergibt sich unmittelbar aus (2), ebenso der zweite, wenn man n_e aus (3) entnimmt und in (2) einsetzt. Auch den dritten findet man durch Elimination von n_e aus (2) und (3), wodurch für λ_0 eine Gleichung dritten Grades erhalten wird; diese reduziert sich bei konsequenter Vernachlässigung der Glieder, die α_j nicht oder nur in der ersten Potenz enthalten, auf

$$\lambda_0^3 q \alpha_j^2 + \lambda_0^2 q \alpha_j^2 - (\beta n) \alpha_e = 0.$$

Aus den obigen drei Werten von λ_0 ist zu entnehmen, daß λ_0 abnimmt mit zunehmendem α_j ; die Anfangswerte der λ -Kurven liegen also „richtig“ untereinander und bestätigen unsere Vermutung von dem in der Abb. 2 gezeichneten Verlauf der Kurven.

Unsere Überlegungen konnten, wie schon erwähnt, im wesentlichen nur orientierende Angaben über den Verlauf von $\lambda(t)$ liefern und insbesondere keine quantitative Verbindung zwischen den Zahlenwerten von λ und t herstellen. Die Betrachtung der Abb. 2 vermittelt aber immerhin einen erwünschten Überblick über den Sachverhalt, wie er ohne die hier durchgeführte analytische Diskussion der Abklinggleichungen wohl kaum hätte erzielt werden können. Eine vollständige Auswertung setzt die Kenntnis der Koeffizienten der Abklinggleichungen voraus, worauf bei anderer Gelegenheit zurückzukommen sein wird. Vorläufig sei nur darauf hingewiesen, daß sehr große λ -Werte erreicht werden können, wenn $(\Re n) \ll (\beta n)$ ist. Es verschiebt sich dann, wie auch physikalisch unschwer verständlich ist, das Mischungsverhältnis zwischen den Elektronen und den negativen bzw. positiven Ionen sehr stark zuungunsten der Elektronen, wobei es allerdings bezüglich der Rückwirkungen auf die Dispersionseigenschaften³⁾ der betreffenden Ionosphärenschicht praktisch darauf ankommt, wann bereits große λ -Werte erreicht werden.

³⁾ G. Goubau, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. 46, 37 (1935).

Greifswald, Physikal. Institut d. Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 15. 12. 1947.)

Neue Behandlungs- und Darstellungsmethode wellenmechanischer Probleme¹⁾

Von **Hartmut Kallmann und Max Päsler**

Inhaltsübersicht

Das Ziel der vorliegenden Arbeit und einer ihr folgenden soll es sein zu zeigen, daß es mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation gelingt, wellenmechanische Probleme in einer neuen, zum Teil wesentlich einfacheren Weise als bisher darzustellen und zu behandeln. Insbesondere wird in dieser ersten Arbeit — nach einer einleitenden Bemerkung über die Laplace-Transformation — der radiale Anteil des H-Atoms behandelt, wobei sich sowohl die diskreten als auch die kontinuierlichen Eigenfunktionen aus einer einzigen Gleichung (3,20) gewinnen lassen.

1.

Die nachstehenden Untersuchungen haben ihren Ausgang von folgenden Überlegungen genommen: Bei der Behandlung verschiedener Probleme der Wellen- und Feldtheorie der Kernphysik tritt die Diracsche δ -Funktion auf, die der Behandlung nach den üblichen mathematischen Methoden nicht ohne weiteres zugänglich ist. Das Vorkommen solcher Funktionen ist aber keineswegs auf die Atomphysik beschränkt. Mit ähnlichen Funktionen arbeitet man auch auf anderen Gebieten, z. B. in der Elektrotechnik, wo δ -artige Funktionen, z. B. bei Einschaltproblemen als „Ableitung“ der sogenannten Einheitssprungfunktion auftreten und dort im allgemeinen als Nadelimpulse bekannt sind. Nun kann man solche „pathologischen“ Funktionen durch Anwendung bestimmter Verfahren auch nach den üblichen mathematischen Methoden behandeln. Die Elektrotechnik hat dafür den Weg der Heavisideschen Operatorenrechnung gefunden, deren strenge mathematische Formulierung und Begründung schließlich durch die Laplace-Transformation gegeben wurde²⁾.

Diese Transformation, die die Form

$$\mathfrak{L}[f(t)] = g(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1,1)$$

hat, transformiert eine Funktion aus einem Koordinatenraum (Oberbereich) mit der Variablen t in einen neuen Koordinatenraum (Unterbereich) mit der Variablen p .

¹⁾ Der größte Teil des Inhalts vorliegender Arbeit war bereits in den Jahren 1945/46 fertiggestellt.

²⁾ G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. J. Springer, Berlin, 1937.

Ihre Anwendung auf die Diracsche δ -Funktion führt dann zur Beziehung

$$\mathfrak{L} [\delta(t-a)] = e^{-ap} \quad (1,2)$$

und man erhält ersichtlich im Unterbereich — also in der Variablen p — statt der „Nadel“ eine durchaus reguläre Funktion.

Bei Anwendung der Transformation (1,1) auf die Diracsche Funktion muß aber auch die Differentialgleichung, in der jene auftritt, derselben Transformation unterworfen werden. Dadurch geht eine vorgegebene lineare Differentialgleichung in eine andere über. Es ist wohlbekannt (s. Doetsch, l. c.), daß durch eine solche Transformation der Differentialgleichung unter Umständen deren Ordnung erniedrigt wird. Dieses Verfahren wurde bereits von Schrödinger in seiner ersten Arbeit³⁾ verwendet. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Glieder der vorgegebenen Differentialgleichung die Variable t als Faktor höchstens in der ersten Potenz enthalten. Treten noch Glieder mit höheren Potenzen von t als Koeffizienten auf, so kann man durch geeignete Operationen manchmal solche störenden Glieder zum Verschwinden bringen und dadurch doch noch die Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung ermöglichen.

Eine Überführung der vorgegebenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in eine solche erster — und damit kommen wir auf einen der Hauptpunkte der vorliegenden Untersuchungen — kann man in vielen Fällen (auch schon ohne Laplace-Transformation) z. B. durch Anwendung der Operation

$$\frac{d^x}{dt^x} t^\beta \quad (1,3)$$

von links oder rechts⁴⁾ auf die vorgegebene Differentialgleichung erreichen. Durch Anwendung der Laplace-Transformation erweitert sich die Zahl der Fälle beträchtlich, in denen eine Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung möglich ist. Wir werden im folgenden Beispiele geben, bei denen sowohl mit wie ohne die Operation (1,3) als auch mit und ohne Laplace-Transformation solche Erniedrigung der Ordnung möglich sind. Dabei wird die Laplace-Transformation eine dominierende Rolle spielen. Sie steht im Vordergrund der folgenden Untersuchungen.

Ergibt sich beim Übergang von dem Oberbereich zum Unterbereich in den Koordinaten des Unterraumes eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung (die ggf. inhomogen ist), so kann deren Lösung nach der üblichen Standardmethode ohne weiteres angegeben werden, und aus dieser Funktion des Unterraumes ergibt sich dann nach der Rücktransformationsformel

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1} [g(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(p) e^{pt} dp. \quad (1,4)$$

[Gegenformel zu (1,1)] die gewünschte Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

³⁾ E. Schrödinger, Ann. Physik 4 (79), 364 ff. (1926).

⁴⁾ Rechtsseitige Anwendung von (1,3) bedeutet Ersetzen der gesuchten Funktion ψ

durch $\frac{d^x}{dt^x} t^\beta \psi$, dabei sind α, β beliebig.

Es hat sich nun aber gezeigt — und damit kommen wir zum zweiten Hauptpunkt unserer Untersuchungen —, daß es in den meisten Fällen für die Ermittlung der physikalischen Ergebnisse gar nicht notwendig ist, diese Rücktransformation vorzunehmen. Vielmehr sind die bekannten Formeln der Laplace-Transformation in hervorragender Weise dazu geeignet, die physikalischen Ergebnisse in den Koordinaten des Oberbereiches ohne weiteres direkt aus den Größen des Unterbereiches zu erschließen. Mit dieser Methode lassen sich in vielen Fällen beispielsweise die Eigenwerte, der Normierungsfaktor der Eigenfunktion, die Momente beliebiger Ordnung und die Nullstellen der Wellenfunktion im Oberbereich ohne große Schwierigkeiten aus den Größen des Unterbereiches direkt ermitteln, ohne Kenntnis der Wellenfunktion im Oberbereich.

Der Vorzug der hier eingeschlagenen Methode, die in der vorliegenden Arbeit insbesondere auf wellenmechanische Probleme angewendet wird, besteht darin, daß die Überführung der auftretenden Wellengleichungen in Differentialgleichungen erster Ordnung eine Standardmethode darstellt, nach der alle behandelten Probleme in völlig gleicher Weise zu lösen sind. Insbesondere erlaubt die Methode auch die verschiedenen, voneinander unabhängigen Lösungen, die auch im Falle von Nichteigenwerten auftreten, in einfachster Weise zu übersehen. Außerdem werden in vielen Fällen die notwendigen Rechnungen vereinfacht und man kommt auch zu neuen Beziehungen.

Wir möchten hier ausdrücklich darauf hinweisen, daß unser Verfahren denselben Ausgangspunkt hat wie das Schrödingersche, nämlich die Zurückführung der bekannten Wellengleichung auf eine Differentialgleichung vom Laplace-Typ^{*)}. Während Schrödinger aber die Methode der Laplace-Transformation, wie sie hier verwendet wird [s. (1,1) und Abschnitt 2], nicht anwandte, vielmehr die Lösung seiner Differentialgleichung — in unserer Terminologie — im Oberbereich mit Hilfe eines komplexen Integrals angibt, ziehen wir alle unsere Schlüsse direkt aus den Funktionen des Unterbereiches und werden vor allem in diesem arbeiten. Es hat dies den Vorteil, daß das bei Schrödinger auftretende komplexe Integral, dessen Integrationsweg überdies noch aus einer Nebenbedingung zu bestimmen ist, nicht benötigt wird. Die endgültigen Lösungen der ursprünglichen Gleichung lassen sich bei uns unmittelbar aus den Funktionen des Unterbereiches entnehmen. Dadurch vereinfachen sich die Verhältnisse in unserer Darstellung wesentlich. Dies gilt insbesondere für die Bestimmung der Momente, worauf wir an der betreffenden Stelle noch besonders hinweisen werden. Obwohl also die von uns verwendete Reduzierung der Wellengleichung nicht neu ist, scheint es uns jedoch nützlich, unser Rechen- und Darstellungsverfahren mitzuteilen, da es in außerordentlich einfacher Weise die Eigenwerte und Lösungen der Wellengleichung herzuleiten gestattet. Wir verweisen diesbezüglich insbesondere auf die Berechnung des kontinuierlichen Spektrums, das aus derselben Formel wie das diskrete Spektrum nur durch Einsetzen anderer Konstanten unmittelbar entnommen werden kann, während die übliche Berechnung desselben^{*)} von einem relativ sehr komplizierten Ansatz ausgeht, wobei der Schrödingersche Ansatz verlassen worden ist, weil er schon zu kompliziert war. Die in den folgenden Arbeiten mitgeteilten

^{*)} L. Schlesinger, Differentialgleichungen, S. 192, (1900) Verlag de Gruyter. Es sei bemerkt, daß eine Diffgl. vom Laplace-Typ in keinem direkten Zusammenhang mit der Laplace-Transformation steht.

^{*)} s. z. B. Sommerfeld u. Schur, Ann. Physik 4, 409 (1930).

Resultate gehen aber auch schon in den Ansätzen über den Schrödingerschen hinaus.

Die folgenden Untersuchungen wenden die hier skizzierte Methode auf die Lösung des radialen Anteils der Wellengleichung des Wasserstoffatoms für den Fall des diskreten als auch den des kontinuierlichen Spektrums an, und zwar wird die Lösung der Differentialgleichung in vollster Allgemeinheit durchgeführt. Sodann wird noch die Differentialgleichung der Hermiteschen Polynome, die simultanen Diracschen Differentialgleichungen des radialen Anteils der Differentialgleichung des Wasserstoffatoms, die Differentialgleichung des Oszillators und die Störungsrechnung (Stark-Effekt) behandelt.

2.

Da die Laplace-Transformation bei den folgenden Darstellungen eine besondere Rolle spielt, schicken wir zur Erleichterung des Verständnisses der eigentlichen Untersuchung eine kurze Zusammenstellung der nachstehend laufend verwendeten Formeln und Beziehungen voraus. Dabei sei besonders darauf hingewiesen, daß wir hier immer mit der sogenannten einseitigen, durch (1,1) bereits definierten Transformation arbeiten. Dies besagt, daß die jeweils auftretende Funktion $F(t)$ des Oberbereiches nur für $t \geq 0$ im allgemeinen nicht verschwindende Werte besitzt. Für $t < 0$ ist $F(t) \equiv 0$ zu setzen. Läuft die Variable t in einem behandelten Problem nicht nur von 0 bis ∞ , sondern von $-\infty$ bis $+\infty$, so kann man oft durch eine einfache Punkt-Transformation eine neue Koordinate einführen, die den gewünschten Beziehungen genügt (s. die später folgende Behandlung des Oszillator-Problems). In manchen Fällen läßt sich auch die Ausdehnung der Lösung auf den Bereich $t < 0$ durch eine bloße Symmetriebetrachtung auffinden. Der Vorzug der Laplace-Transformation vor der Fourier-Transformation beruht darauf, daß eine Reihe wohl bekannter Beziehungen existiert, die angeben, wie die Unterfunktion sich verändert, wenn man gewisse Operationen an den Oberfunktionen ausübt. So gelten z. B. folgende im Nachstehenden stets verwendete Regeln, die, um ein Nachschlagen zu vermeiden, hier zusammengestellt sind. Die Anwendung der Laplace-Transformation auf irgendeine Funktion $F(t)$ bezeichnet man im allgemeinen mit \mathfrak{L} , den Übergang von der Unterfunktion zu der Oberfunktion mit \mathfrak{L}^{-1} . Aus der durch (1,1) gegebenen Definition und der durch (1,4) festgelegten Rücktransformation folgen die nachstehenden Formeln:

$$\mathfrak{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} F(t) \right] = p^n g(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} F^{(i)}(0) \quad (2,1)$$

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t F(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{p} g(p) \quad (2,2)$$

$$\mathfrak{L} \left[\begin{matrix} F(t-a) \\ 0 \end{matrix} \right] = e^{-ap} g(p) \quad \left\{ \begin{array}{l} t \geq a \\ t < a \\ a \geq 0 \text{ und reell} \end{array} \right. \quad (2,3)$$

$$\mathfrak{L} [F(t+a)] = e^{ap} \left\{ g(p) - \int_0^a e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \right\} \quad (2,4)$$

$$\mathfrak{L} [t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n g}{dp^n} \quad (2,5)$$

$$\mathfrak{L} \left[\frac{1}{t^n} F(t) \right] = \int_p^\infty dp_n \int_{p_n}^\infty dp_{n-1} \cdots \int_{p_1}^\infty g(p_1) dp_1 \quad (2,6)$$

$$\mathfrak{L} [e^{at} F(t)] = g(p-a) \quad (2,7)$$

$$\mathfrak{L} [F_1(t)] \cdot \mathfrak{L} [F_2(t)] = \mathfrak{L} \left[\int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \right] \quad (2,8)$$

Diese Formeln zeigen, daß einer Operation im Oberbereich jeweils eine ganz bestimmte Operation im Unterbereich entspricht. Hier interessieren besonders die Operationen der Multiplikation mit t im Oberbereich, die der Differentiation nach p im Unterbereich entsprechen. (Dies ist ganz analog der in der Quantenmechanik eingeführten Operation, bei der die Multiplikation mit einer Koordinate äquivalent ist einer Differentiation nach dem konjugierten Impuls). Mit Hilfe dieser Formeln wird die eingangs mehrfach erwähnte Reduktion der Wellengleichung vorgenommen werden⁷⁾. Diese Formeln ermöglichen es, die Anwendung einer Differential-Operation oder der Multiplikation mit einer anderen Funktion auf $F(t)$ im Unterbereich durch einen geschlossenen Ausdruck in $g(p)$ sofort auszudrücken.

Außer diesen Formeln, die immer wieder verwendet werden, wird in großem Umfange von der sogenannten Asymptotik der Laplace-Transformation Gebrauch gemacht. Diese besagt, daß man aus Werten der Unterfunktion an bestimmten Stellen die Werte der Oberfunktion an bestimmten Stellen ermitteln kann. Uns werden im folgenden insbesondere die Werte der Oberfunktion an den Stellen $t=0$ und $t=\infty$ interessieren. Die Werte an der Stelle $t=0$ ergeben sich aus der sogenannten Tauberschen Asymptotik aus folgendem Satz⁸⁾: Hat eine Unterfunktion, insbesondere für $p \rightarrow \infty$, die Entwicklung:

$$\mathfrak{L} [F(t)] = g(p) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{-\mu_n} \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots, \quad (2,9)$$

so gelten folgende Beziehungen für $t=0$:

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{\mu_n}}{\Gamma(\mu_n + 1)}, \quad (2,10)$$

$$F(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{\mu_n-1}}{\Gamma(\mu_n)} \quad t \rightarrow 0. \quad (2,11)$$

Man kann also aus ihnen aus dem Verlauf der Funktion $g(p)$ für $p \rightarrow \infty$ auf das asymptotische Verhalten der Funktion $F(t)$ im Nullpunkt schließen. Diese Formeln ermöglichen es, de facto die Werte des Verhaltens der Oberfunktion in jedem beliebigen Punkt t der Funktion asymptotisch aus dem Unterbereich zu ermitteln, indem man einmal das Problem für die Variable $t=r$, ein anderes Mal für die Variable $t=r-a$ ermittelt. Im letzteren Fall erhält man aus den oben angege-

⁷⁾ Dieses Verfahren wurde bei anderen Problemen u. a. von H. Fischer verwendet (zitiert nach E. Hameister: Laplace-Transformation).

⁸⁾ Wegen weiterer Einzelheiten und Gültigkeitsbedingungen vgl. G. Doetsch, I. c., S. 243.

gebenen asymptotischen Formeln das Verhalten der Funktion $F(t)$ an der Stelle $r = a$.

Das Verhalten der Funktion $F(t)$ im Unendlichen ergibt sich im allgemeinen aus dem Verhalten der Unterfunktion in der Umgebung ihrer Pole, und zwar sind für das asymptotische Verhalten von $F(t)$ diejenigen Pole maßgebend, deren Realteil b in der komplexen Ebene am weitesten rechts liegt. Folgende Formeln der sogenannten indirekten Abelschen Asymptotik sind dazu notwendig⁹⁾: Es gelten für $g(p)$ folgende Entwicklungen, wobei p_0 einen Punkt der Halbebene $\Re(p) < b$ und $\psi(p)$ eine stetige reguläre, genügend oft differenzierbare Funktion rechts von b ist: Hat $g(p)$ in der Nähe $p = p_0$ eine der nachstehenden Entwicklungen:

$$g(p) = \frac{c}{(p-p_0)^\beta} + \psi(p) \quad \Re(\beta) \geq 0 \quad (2,12)$$

$$g(p) = \frac{c}{(p-p_0)^\beta} + \psi(p) \quad \Re(\beta) \leq 0, \beta \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2,13)$$

$$g(p) = c(p-p_0)^k \ln(p-p_0) + \psi(p) \quad k = 0, 1, 2 \quad (2,14)$$

$$g(p) = c \frac{\ln(p-p_0)}{(p-p_0)^\beta} + \psi(p) \quad \beta \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (2,15)$$

dann gelten für $F(t)$ mit $t \rightarrow \infty$ nachstehende Bedingungen¹⁾

$$F(t) \sim \frac{c}{\Gamma(\beta)} e^{p_0 t} t^{\beta-1} \quad \text{im Fall (2,12) und (2,13)} \quad (2,16)$$

$$F(t) \sim (-1)^{k-1} k! \cdot e^{p_0 t} t^{-k-1} \quad (2,17)$$

$$F(t) \sim -\frac{c}{\Gamma(\beta)} e^{p_0 t} t^{\beta-1} \left(\ln t - \frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} \right). \quad (2,18)$$

Vorstehende Formeln werden insbesondere im Nachfolgenden zur Bestimmung der Eigenwerte der Differentialgleichungen des Oberbereichs verwendet werden. Diese werden bekanntlich dadurch festgelegt, daß die Oberfunktion im Nullpunkt und im Unendlichen (oder unter Umständen in zwei beliebigen Punkten des Oberbereiches) bestimmte Regularitätsbedingungen erfüllt. Durch die Formeln (2,9) bis (2,18) werden aber diese Randbedingungen des Oberbereiches aus dem Verhalten der Unterfunktion in bestimmten Punkten des Unterbereiches (nämlich für $p \rightarrow \infty$ und an den Polen) ermittelt. Man muß über die zur Verfügung stehenden Konstanten bzw. die Größe, deren Wert man ermitteln will, so verfügen, daß nach (2,10) und (2,11) bzw. (2,16) bis (2,18) die Randbedingungen der Funktion des Oberbereiches erfüllt sind. Das ergibt dann jeweils die Eigenwerte der gesuchten Größen.

Außer diesen Sätzen werden wir noch die nachstehende sogenannte „Faltung“ im Unterbereich benutzen¹⁰⁾:

$$\mathfrak{L}[F_1(t) \cdot F_2(t)] = \frac{1}{2\pi i} \oint g_1(p-q) g_2(q) dq. \quad (2,19)$$

Sie ermöglicht die Berechnung von Produkten von Wellenfunktionen bzw. mit Hilfe der Formeln (2,1) bis (2,18) von Integralen über solche Produkte, die sich über den ganzen Bereich der Variablen der Oberfunktion erstrecken und läßt sich z. B. anwenden zur Berechnung der Normierungskonstanten und der Momente beliebiger Ordnung direkt aus den Funktionen des Unterbereiches.

⁹⁾ G. Doetsch, l. c. S. 269 ff.

¹⁰⁾ G. Doetsch, l. c. S. 167 ff.

3.

Zunächst wollen wir die im vorausgegangenen skizzierte Behandlung auf den einfachen Fall des radialen Anteils R der Wellengleichung des H-Atoms anwenden, gehen also von der bekannten Differentialgleichung

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left(A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} \right) R = 0 \quad (3,4)$$

aus, in der A , B und C Abkürzungen für die nachstehenden Ausdrücke sind.

$$A = \frac{2mE}{\hbar^2} = -\frac{1}{r_0^2} \quad (3,5)$$

$$B = \frac{Ze^2m}{\hbar^2} \quad (3,6)$$

$$C = -l(l+1). \quad (3,7)$$

Unterwirft man Gl. (3,4) der Laplace-Transformation, indem man jedes ihrer Glieder mit dem Faktor $e^{-\rho r}$ (jetzt entspricht r der bisherigen Oberbereichs-Variablen t) multipliziert und einzeln über r von 0 bis ∞ integriert, so entspricht jedem Glied der Differentialgleichung im Oberbereich eine Laplace-Transformierte, wobei diese aber alle voneinander verschieden sind. Sie lassen sich jedoch auf Grund der Formel (2,1) bis (2,8) auf die Unterfunktion von R zurückführen. Die Ausführungen ergäben eine neue Differentialgleichung im Unterbereich, die aber um nichts einfacher wäre als (3,4) selber. Man kann indessen diese Gleichung im Unterbereich wesentlich vereinfachen. Das Auftreten der Größe r^2 in der genannten Gleichung bedeutet nämlich im Unterbereich immer das Auftreten eines Differentialquotienten zweiter Ordnung. Würde man dieses Glied, also das Glied C/r^2 zum Verschwinden bringen können, so verschwände damit im Unterbereich auch der Differentialquotient zweiter Ordnung¹¹⁾. Es ist bekannt, daß man durch Ersetzen der Funktion R durch

$$R = r^\alpha F(r) \quad (3,8)$$

das Glied C/r^2 fortschaffen kann. Zur Vereinfachung führen wir mit Sommerfeld die neue Variable

$$\varrho = 2 \frac{r}{r_0} \quad (3,9)$$

ein und gelangen so zur Differentialgleichung

$$R'' + \frac{2}{\varrho} R' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{\varrho} \frac{B}{\sqrt{-A}} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right] R = 0. \quad (3,10)$$

Geht man mit dem Ansatz (3,8) in Verbindung mit (3,9) mit zunächst noch unbestimmten Koeffizienten α in (3,10) ein, so erhält man die Gleichung

$$F(\varrho) \left[\frac{\alpha(\alpha+1) - l(l+1)}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{B}{\sqrt{-A}} - \frac{1}{4} \right] + \frac{2(\alpha+1)}{\varrho} F'(\varrho) + F''(\varrho) = 0. \quad (3,11)$$

Das Glied mit $1/\varrho^2$ fällt fort, wenn für α die folgenden Werte

$$\alpha_{1,2} = \begin{cases} - (l+1) \\ + l \end{cases} \quad (3,12)$$

¹¹⁾ Vgl. Fischer, l. c.

gesetzt werden. Wir lassen es zunächst noch offen, welchen der beiden zur Auswahl stehenden Werte wir α erteilen wollen. Auf jeden Fall erhält man, wenn man unter α von nun an stets einen der beiden Werte (3,12) versteht und als weitere Abkürzung

$$\beta = \frac{B}{\sqrt{-A}} \quad (3,13)$$

benutzt und (3,11) noch mit ϱ multipliziert, immer die folgende Gleichung:

$$\varrho \frac{d^2 F}{d\varrho^2} + 2(\alpha + 1) \frac{dF}{d\varrho} + \left(\beta - \frac{\varrho}{4}\right) F = 0. \quad (3,14)$$

Bis hierhin weichen unsere Rechnungen von den üblichen nicht ab, insbesondere gleicht (3,14) derjenigen, die Schrödinger¹²⁾ in seiner ersten Arbeit erhielt. Da hier außer Konstanten nur noch der Faktor ϱ vorkommt, ergibt die Ausübung der \mathfrak{L} -Transformation mit Verwendung der Relationen (2,1) und (2,5) nur noch das Auftreten eines Differentialquotienten erster Ordnung in der Gleichung des Unterbereichs. Man erhält für sie:

$$\frac{d\varphi}{dp} \left(-p^2 + \frac{1}{4}\right) + [2\alpha p + \beta]\varphi(p) = (2\alpha + 1)F(0). \quad (3,15)$$

Dabei ist

$$F(0) = [F(\varrho)]_{\varrho=0} = \text{const} \quad (3,16)$$

eine von ϱ unabhängige Größe. Wir bemerken nochmals, daß die Funktion F nun nicht mehr die radiale Wellenfunktion R ist, sondern gemäß (3,8) und (3,9) durch

$$F(\varrho) = \frac{R(\varrho)}{\varrho^\alpha} \quad (3,17)$$

gegeben ist.

Die Differentialgleichung (3,15) ist zwar von erster Ordnung, aber sie ist im Gegensatz zur ursprünglichen nunmehr inhomogen, wodurch aber ihre Behandlung keineswegs erschwert wird. Wir wollen aber zunächst mit der vereinfachten Annahme

$$F(0) = 0 \quad (3,18)$$

weiterrechnen. Wir dürfen dann aber nur solche Lösungen zulassen, die der Bedingung (3,18) genügen. Wir werden sehen, daß diese zusätzliche Bedingung nur einen der beiden möglichen Werte von α zuläßt.

Wir werden uns später von der einschränkenden Bedingung (3,18) befreien und den Fall allgemeinsten Anfangsbedingungen eingehend behandeln.

Die Lösung von (3,15) mit $F(0) = 0$ ergibt nach üblicher elementarer Rechnung

$$\ln \varphi(p) = \alpha \ln \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) + \beta \int \frac{dp}{p^2 - \frac{1}{4}}, \quad (3,19)$$

$$\varphi(p) = C \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\beta + \alpha}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\beta - \alpha}}. \quad (3,20)$$

C ist eine aus der Normierung der Oberfunktion zu bestimmende Konstante¹³⁾. Die Forderung, $F(0) = 0$, verlangt auf Grund der Tauberschen Asymptotik (2,9)

¹²⁾ E. Schrödinger, I. c.

¹³⁾ Wie C unmittelbar aus dem Unterbereich sich ermitteln läßt, wird in einer demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit gezeigt werden.

bis (2,11), daß die Unterfunktion im Unendlichen mit einer höheren Potenz von $\frac{1}{p}$ als der ersten verschwindet, weil $\frac{1}{p^m}$ im Oberbereich l^{m-1} entspricht. Die Entwicklung von (3,20) für $p \rightarrow \infty$ ergibt aber

$$q(p) = \frac{p^{\beta+\alpha} \left(1 - \frac{1}{2p}\right)^{\beta+\alpha}}{p^{\beta-\alpha} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{\beta-\alpha}} = \frac{1}{p^{-2\alpha}} [1 + \dots]. \quad (3,21)$$

Der niedrigste Exponent von $\frac{1}{p}$ hat den Wert -2α . Damit F an der Stelle $r=0$ verschwindet, muß dieser > 1 sein, also kommt für α nach (3,12) nur der Wert

$$\alpha = -(l+1) \quad (3,22)$$

in Frage. Damit ist α bestimmt. Der Wert von β , d. h. nach Formel (3,13) in Verbindung mit (3,5) und (3,6) der Wert der Energie, ergibt sich jetzt aus der Forderung, daß die Oberfunktion im Unendlichen verschwinden soll. Dann folgt aus den Formeln (2,16), (2,17) in Verbindung mit (2,12), daß die Unterfunktion in dem Bereich der positiven Halbebene keine Pole haben darf. Es muß also β so bestimmt werden, daß an der Stelle $p = p_0 = \frac{1}{2}$ keine Pole der Funktion und keine Nullstellen mit gebrochenen Exponenten liegen [s. (2,12) und (2,13)]. Das bedeutet, daß β ganzzahlig und positiv sein muß, also nach (3,22)

$$\beta = n \geq l+1, \quad n = \text{ganzzahlig} \quad (3,23)$$

unter Verwendung der Beziehungen (3,13) und (3,5) bis (3,7) ergibt sich daraus für die Energie E die bekannte Eigenwertformel

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{2 \hbar^2 n^2} \quad (3,24)$$

mit $n \geq 1$. Es haben sich also die Eigenwerte, wie bereits eingangs bemerkt, direkt aus der Unterfunktion bestimmen lassen, ohne daß die Kenntnis der Oberfunktion erforderlich war.

Um nun den Vergleich mit den bekannten Resultaten durchzuführen, möge diese Rücktransformation noch vorgenommen werden. Dabei können wir entweder von der Formel (1,4) Gebrauch machen oder ein Laplace-Lexikon¹⁴⁾ benutzen. Aus letzteren ergibt sich als zu (3,20) gehörige Oberfunktion

$$\mathcal{Q}^{-1}[q(p)] = F(q) = C e^q q^{2l+1} \cdot L_{n-l-1}^{(2l+1)}(q). \quad (3,25)$$

Berücksichtigt man noch, daß sich die Wellenfunktion R nach (3,8) berechnet, so erhält man für diese

$$\begin{aligned} R &= F(q)/q^{l+1} \\ &= C e^{-\frac{q}{2}} \cdot q^l L_{n-l-1}^{(2l+1)}(q), \end{aligned} \quad (3,26)$$

die mit der bekannten Lösung der Schrödingerschen Gleichung übereinstimmt. In ihr bedeuten L die bekannten Laguerreschen Polynome, die in der hier benutzten Schreibweise von der Variablen q abhängen. Wir verweisen ausdrücklich darauf, daß das L der letzten Funktionen nicht mit dem Laplace-Symbol \mathcal{L} zu verwechseln ist. Die hier auftretenden Indizes weichen von denen von Sommer-

¹⁴⁾ Vgl. z. B. Magnus-Oberhettinger: Formeln u. Sätze der spez. Fkt. der math. Physik. J. Springer, Berlin, 1944.

feld ab. Zwischen den Bezeichnungen bei Sommerfeld und den unseren besteht die leicht ersichtliche Beziehung

$$S_{L_{i+k}^i}(\varrho) = (k+i)! L_k^i. \quad (3,27)$$

Für diejenigen, die mit der Laplace-Transformation nicht vertraut sind, mag es gestattet sein, anhangsweise die Formel (3,25) auch unmittelbar mit Hilfe der Formel (1,4) bzw. (2,1) bis (2,5) in einfacher Weise herzuleiten. Da $\beta - l - 1$ eine ganze positive Zahl ist, nennen wir sie m , drückt sich (3,20) durch

$$q(p) = C \frac{(p - \frac{1}{2})^m}{(p + \frac{1}{2})^{m+2(l+1)}} \quad (3,28)$$

aus. Mit Hilfe von (2,3) bzw. (2,4) folgt daraus folgende Beziehung¹⁵⁾

$$\mathfrak{L}^{-1}[q(p)] = C \cdot e^{-\frac{\varrho}{2}} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{(p-1)^m}{p^{m+2(l+1)}} \right] \quad (3,29)$$

$$\mathfrak{L}^{-k}[q(p)] = C e^{-\frac{\varrho}{2}} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^{m+2(l+1)}} (L^m + m L^{m-1} + \dots) \right] \quad (3,30)$$

$$= C e^{-\frac{\varrho}{2}} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^{2(l+1)}} - m \frac{1}{p^{2(l+1)+1}} + \dots \right]. \quad (3,31)$$

Es treten also $m+1$ Glieder von der Form $\frac{1}{p^k}$ auf. Die Anwendung von (1,4) auf diese einzelnen Glieder ergibt

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{p^k} \right] = \frac{\varrho^{k-1}}{\Gamma(k)}. \quad (3,32)$$

Anwendung dieser Formel auf (3,31) führt dann zu dem Ergebnis, daß die gesuchte Oberfunktion ein Produkt der e -Funktion und einem Polynom ist, das sich mit dem bekannten Laguerreschen als identisch erweist. Man kann die Formel (3,30) in Verbindung mit (3,32), also $F(\varrho)$ für große Werte der Variablen auch sofort aus den asymptotischen Formeln (2,12) und (2,17) entnehmen. Denn nach unseren früheren Ausführungen über die Eigenwerte sind für das Verhalten im Unendlichen nur die Pole der Funktion (3,28) maßgebend. Die Entwicklung dieser Funktion an der Stelle $p = -\frac{1}{2}$ gibt den Ausdruck

$$\begin{aligned} q(p) &= C (\bar{p}-1)^m \cdot \bar{p}^{-m-2(l+1)} \\ &= C \bar{p}^{-m-2(l+1)} [1 - \dots] \\ &= C [\bar{p}^{-2(l+1)-m} - \dots] \quad \text{mit } \bar{p} = p + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3,33)$$

und nach Formel (2,16) folgt daraus für große Werte von ϱ

$$F(\varrho) \sim e^{-\frac{\varrho}{2}} \varrho^{m+2l+1} = e^{-\frac{\varrho}{2}} \cdot \varrho^{\beta-1}, \quad (3,34)$$

was für diese mit (3,25) oder (3,30) + (3,32) übereinstimmt.

¹⁵⁾ Wir erinnern an dieser Stelle nochmals an die eingangs gemachte Bemerkung über das Verfahren von Schrödinger und verweisen darauf, daß unsere Gleichung (3,29) unter Beachtung von (1,4) mit der bei Schrödinger (l. c.) auf Seite 365 angegebenen Gleichung (12) übereinstimmt, nur ist dort der Integrationsweg ein anderer und erst aus einer Nebenbedingung zu ermitteln, während gemäß (1,4) und (3,32) das Resultat sofort zu erhalten ist. Die Einfachheit dieser Formel beruht darauf, daß man $q(p)$ für $p \rightarrow \infty$ entwickeln kann und dann mit Hilfe von (3,32) sofort die Potenzreihenentwicklung der Oberfunktion hat.

4.

Wir wollen nun auch das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffes nach derselben Methode behandeln. Dabei wird die Einfachheit und Überlegenheit der hier verwendeten Methode gegenüber dem üblichen Verfahren besonders deutlich zum Ausdruck kommen. Man kann nämlich das kontinuierliche Spektrum ebenso wie das diskrete sofort aus der Unterbereichslösung (3,20) entnehmen. Da aber bei dem kontinuierlichen Spektrum im allgemeinen nur das asymptotische Verhalten von R für große r interessiert, kann man die Rechnung dadurch noch einfacher gestalten, daß man die Funktion direkt aus den Formeln der Asymptotik, wie wir es oben ausgeführt haben, entnimmt.

Der einzige Unterschied gegen die frühere Rechnung besteht darin, daß wir die Variablen etwas anders wählen müssen. Die Differentialgleichung des Problems bleibt die gleiche wie oben (3,4). Nun hatten wir aber durch Gleichung (3,5) die Konstante A bzw. E definiert und durch die Gleichung (3,9) die Variable ϱ bestimmt. Im kontinuierlichen Spektrum ist nun aber die Größe A durch

$$A = + \frac{1}{r_0^2} = \frac{2 m E}{\hbar^2} \quad (4,1)$$

gegeben, wobei jetzt die Energie E positive Werte hat. A ist also jetzt positiv, während es früher negativ war. Infolgedessen würde die Variable ϱ imaginär sein. Um aber mit reellen Variablen zu rechnen, definieren wir in diesem Abschnitt ϱ durch

$$\bar{\varrho} = \frac{2 i r}{r_0} = i \varrho. \quad (4,2)$$

Das jetzige $\bar{\varrho}$ unterscheidet sich also von dem früheren ϱ um den Faktor i . Es ist also $\bar{\varrho}$ damit zu einer reellen Variablen gemacht worden. Ferner wird die durch (3,13) festgelegte Größe β nunmehr durch

$$\beta = \frac{B}{\sqrt{-A}} = \frac{B}{i\sqrt{A}} = -i n \quad (4,3)$$

gegeben. β ist also im Gegensatz zu dem vorausgegangenen Abschnitt imaginär. Um mit reellen Größen zu rechnen, haben wir durch (4,3) die reelle Größe n eingeführt, die jede beliebigen positiven Werte annehmen kann, also nicht ganzzahlig zu sein braucht. An den früheren Ausführungen ändert sich also nur, daß an Stelle der Variablen ϱ die Variable $i \varrho$ eingeführt wird und an Stelle der Größe $\beta \rightarrow -i \cdot n$ tritt. Dann folgt aber aus dem Ähnlichkeitssatz

$$\mathfrak{L} [F(a \varrho)] = \frac{1}{a} g\left(\frac{p}{a}\right) \quad (4,4)$$

der Laplace-Transformation, daß, wenn

$$\begin{aligned} \varrho &\rightarrow i \varrho \\ p &\rightarrow \frac{p}{i} = -i p. \end{aligned} \quad (4,5)$$

Als Lösung folgt dann aus (3,20) für die Laplace-Transformierte der Wellenfunktion F für den Fall des kontinuierlichen Spektrums die Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= C \frac{\left(\frac{p}{i} - \frac{1}{2}\right)^{-i n + \alpha}}{\left(\frac{p}{i} + \frac{1}{2}\right)^{-i n - \alpha}} = \bar{C} \frac{\left(p - \frac{i}{2}\right)^{-i n + \alpha}}{\left(p + \frac{i}{2}\right)^{-i n - \alpha}} \\ &= \bar{C} \frac{1}{\left(p - \frac{i}{2}\right)^{(i+1)+i n}} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{i}{2}\right)^{(i+1)-i n}}. \end{aligned} \quad (4,6)$$

Dabei ist in der neuen Konstanten \bar{C} eine Potenz von i enthalten. Dagegen ist der Wert von α derselbe wie früher. Man kann natürlich dasselbe Resultat durch direkte Rechnung aus (3,4) analog den Ausführungen von (3,10) bis (3,20) finden.

Aus der Gleichung (4,6) entnehmen wir nunmehr die gewünschten Lösungen mit Hilfe der Asymptotik, nach der für das Verhalten von F für $q \rightarrow \infty$ das Verhalten von $\varphi(p)$ in der Umgehung der Stellen

$$p_0 = \pm \frac{i}{2} \quad (4,7)$$

maßgeblich ist. Nach den Gesetzen der Asymptotik sind nämlich diejenigen Pole und Nullstellen mit dem größten Realteil von p für das Verhalten von $F(q)$ im Unendlichen ausschlaggebend. Hier liegen nun zwei Pole mit dem gleichen Realteil, $\Re(p_0) = 0$, und einem Exponenten mit demselben Realteil $l+1$ vor. Für das asymptotische Verhalten der Funktion F sind also beide Pole zu berücksichtigen. Wir behandeln zunächst den Pol an der Stelle $p = +\frac{i}{2}$. Die Entwicklung der Funktion in der Nähe dieser Stelle führt zu dem Ausdruck

$$\varphi \approx \bar{C} \frac{1}{(p - \frac{i}{2})^{l+n+1}} (1 + \dots), \quad (4,8)$$

woraus man mit (2,16) für das Verhalten der Oberfunktion auf

$$F^+(q) \sim \frac{e^{\frac{i}{2}q} q^{(l+n+1)-1}}{\Gamma(l+n+1)} \quad (4,9)$$

schließt.

Dieses ist aber nur der eine Teil der gesuchten Funktion, den wir mit F^+ bezeichnen. Es kommt hinzu derjenige Anteil F^- , der von dem Pol an der Stelle $p = -\frac{i}{2}$ herrührt, und der sich ganz entsprechend aus der Entwicklung an dieser Stelle zu

$$F^-(q) \sim \frac{e^{-\frac{i}{2}q} q^{-l-n}}{\Gamma(-l-n+1)} \quad (4,10)$$

errechnet. Der Gesamtwert von F ergibt sich also als Summe von (4,9) und (4,10) zu

$$F \approx q^l \left(\frac{e^{\frac{i}{2}q} q^{l+n}}{\Gamma(l+n+1)} + \frac{e^{-\frac{i}{2}q} q^{-l-n}}{\Gamma(-l-n+1)} \right). \quad (4,11)$$

Daraus folgt für die Wellenfunktion R nach (3,8) der Wert

$$\begin{aligned} R &\sim q^a F \\ &\sim q^{-1} (\dots) \\ &\sim \frac{e^{-\frac{i}{2}q} q^{-l-n-1}}{\Gamma(-l-n+1)} + \frac{e^{+\frac{i}{2}q} q^{l+n-1}}{\Gamma(l+n+1)}. \end{aligned} \quad (4,12)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der üblichen z. B. bei Sommerfeld sich findenden Formulierung der kontinuierlichen Wellenfunktion überein. Denn geht man auf unsere Gleichung (4,2) zurück und führt mit Sommerfeld den Faktor

$k^2 = 2mE/\hbar^2 = \frac{1}{r_0^2}$ ein, so ergibt sich für unser

$$q = \frac{2r}{r_0} = 2kr. \quad (4,13)$$

Geht man damit in (4,12) ein und beachtet, daß allgemein

$$q^{in} = e^{\ln q^{in}} = e^{(in) \ln q} \quad (4,14)$$

gilt, so erhält man für das Verhalten von R den Ausdruck

$$\begin{aligned} R &\sim \frac{e^{-\frac{i\varrho}{2}} e^{(-in-1) \ln q}}{\Gamma(-in+l+1)} + \frac{e^{\frac{i\varrho}{2}} e^{(in-1) \ln q}}{\Gamma(in+l+1)} \\ &\sim \frac{e^{-\frac{i\varrho}{2}} e^{-in \ln q}}{q \Gamma(\dots)} + \frac{e^{\frac{i\varrho}{2}} e^{in \ln q}}{q \Gamma(\dots)}, \end{aligned} \quad (4,15)$$

welcher mit der Sommerfeldschen Formulierung identisch ist¹⁶⁾. Wie man sich natürlich auch hier wieder leicht überzeugen kann (durch Entwicklung für $p \rightarrow \infty$), verschwindet die Lösung von F im 0-Punkt nur dann, wenn wir für α den Wert $-(l+1)$ wählen.

Man kann die Eigenfunktion des Kontinuums auch ohne Verwendung der Asymptotik direkt aus Formel (4,6) nach dem in Absatz 3 eingeschlagenen Verfahren gewinnen. Zu diesem Zweck ist es vorteilhaft, (4,6) um den Anschluß an (4,11) zu gewinnen, gemäß

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{\left(p - \frac{i}{2}\right)^{-in-l-1}}{\left(p + \frac{i}{2}\right)^{-in+l+1}} \right] \\ = \frac{1}{2} \left\{ e^{-\frac{i\varrho}{2}} L^{-1} \left[\frac{1}{p^{2(l+1)}} \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{-in-l-1} \right] + e^{+\frac{i\varrho}{2}} L^{-1} \left[\frac{1}{p^{2(l+1)}} \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{in-l-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4,16)$$

zu zerspalten. Dann kann man mit Hilfe von (1,4) bzw. (3,32) die Wellenfunktion, ähnlich wie wir es für das diskrete Spektrum getan haben, als Reihe nach steigenden Potenzen von q ermitteln. Die in (4,16) vorgenommene Zerspaltung hat nur mehr formale Bedeutung, denn die Oberfunktion zu (4,6) ist immer eine stehende Welle. Man erkennt nämlich aus den Ausführungen unserer folgenden Arbeit, daß auslaufende Wellen allein immer zu einer Nullpunkt-singularität für $R(r)$ führen.

Schon diese Ausführungen zeigen, daß die Behandlung der Wellengleichung nach dieser Methode wesentliche Vereinfachungen bringt. Wir werden in zwei folgenden Arbeiten zeigen, daß es nach dem gleichen Verfahren auch sehr einfach möglich ist, direkt aus der Gleichung (3,20) alle physikalisch interessierenden Größen zu berechnen. Um aber den Sinn der hier durchgeführten Rechnung klar hervortreten zu lassen, werden wir zunächst noch die Bedeutung der Laplace-Transformation erläutern und dabei die Differentialgleichung (3,15) noch auf ganz andere Weise ableiten.

¹⁶⁾ A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien S. 121/122; F. Vieweg, Braunschweig, 1930.

Berlin-Charlottenburg, Institut für theoretische Physik der Technischen Universität, und Berlin-Dahlem, Kaiser-Wilhelm-Institut für Physikalische Chemie und Elektrochemie und Gastabteilungen.

(Bei der Redaktion eingegangen am 25. Februar 1948.)

Allgemeine Behandlung des H-Atoms mit beliebigen Anfangsbedingungen mittels der Laplace-Transformation und deren physikalische Bedeutung

Mitteilung II zu „Eine neue Behandlungs- und Darstellungsmethode wellenmechanischer Probleme“¹⁾

Von Hartmut Kallmann und Max Päsler

Inhaltsübersicht

In Fortsetzung der vorausgegangenen Arbeit wird zunächst die physikalische Bedeutung der von uns verwendeten Laplace-Transformation dargelegt und die früher erhaltenen transformierten Differentialgleichungen noch auf andere Weise hergeleitet. Zur weiteren Erläuterung der Methode wird nach demselben Verfahren auch noch die Differentialgleichung der Hermiteschen Polynome behandelt. Sodann wird die Differentialgleichung des radialen Anteils des H-Atoms in allgemeiner Form nach diesem Verfahren untersucht und dabei keine Voraussetzungen mehr über irgendwelche Anfangsbedingungen gemacht. Es läßt sich nach dieser Methode das Verhalten der Funktion auch für Nicht-eigenwerte übersehen und auch die Nullstellen der Funktion direkt aus den vereinfachten transformierten Gleichungen ermitteln.

In einer vorausgegangenen Arbeit zum gleichen Thema¹⁾ hatten wir bei der Bestimmung der Lösung der Wellengleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation die vereinfachende Annahme eingeführt, daß die Funktion F an der Stelle $q = 0$ selber 0 sei und nachträglich die Berechtigung dieser Annahme verifiziert. Wir werden nunmehr ganz allgemein vorgehen und alle speziellen Annahmen fallen lassen. Bevor wir aber dies tun, wollen wir noch die physikalische Bedeutung der vorzunehmenden Transformation etwas näher betrachten und die erhaltene Differentialgleichung (I, 3,15)²⁾ erster Ordnung noch auf zwei andere Weisen herleiten.

1.

Augenscheinlich stellt die Laplace-Transformation eine Transformation auf Impulskordinaten dar. Um ihre physikalische Bedeutung genauer zu erkennen, gehen wir von Formel (I, 1,1) aus, die eine Fourier-Transformation der Funktion F darstellt, wenn man für p die Größe $i \cdot p'$ einführt. Setzt man für $t = r$ und genügt die Funktion F der Bedingung für negative Werte von t zu verschwinden,

¹⁾ H. Kallmann u. M. Päsler, Ann. Physik (6) 2, 292 (1948).

²⁾ Die I in dem Formelzitat bezieht sich auf unsere erste zu diesem Thema in der vorstehenden Fußnote angeführte Arbeit.

wie es bei dem betrachtenden Problem in der Tat der Fall ist, so kann man die von uns in I, 3 benutzte Größe p mit der imaginären Impulskomponente p_r in Richtung des Ortsvektors r identifizieren. Die \mathfrak{L} -Transformierte von (I, 3) muß in einem Zusammenhang mit der Fourier-Transformierten von R stehen, den wir nachstehend aufzeigen werden.

Es ist also diese Transformation der Wellenfunktion nicht eine Transformation in den üblichen Impulsraum, sondern es handelt sich hier, wie wir sagen möchten, um eine gemischte Darstellung. Die Funktionen, die von ϑ , φ abhängen, werden beibehalten und nur der von r abhängende Teil wird in den Impulsraum transformiert. Als Transformationsvariable tritt dann die Größe p_r auf. Sie ist wohl zu unterscheiden von der, in der Betrachtungsweise von Hylleraas³⁾ auftretenden Größe p , welche bei ihm den Vektor bzw. den Betrag des gesamten Impulses darstellt, entsprechend der Tatsache, daß seine Transformation alle Koordinaten in den Impulsraum transformiert, also seine Winkel Θ , Φ die Richtungswinkel des Impulsvektors sind und nicht die Polarwinkel des Koordinatenvektors r . Die von uns gefundene Vereinfachung der mathematischen Behandlung ist gerade in diesem p_r -Raum möglich, nicht in dem von Hylleraas angenommenen Impulsraum. Man sieht das aus den folgenden Ausführungen. Zunächst transformieren wir die Funktion $F(xyz)$ nach Fourier

$$\Phi(p_x p_y p_z) = \iiint F(x, y, z) \cdot e^{-i(xp_x + yp_y + zp_z)} dx dy dz. \quad (1,1)$$

Wir führen nun den Ortsvektor r und die Polarwinkel ϑ und φ ein. Nun ist der Exponent in der e -Funktion nichts anderes als das skalare Produkt des Impulsvektors p mit dem Ortsvektor r . Für diesen können wir auch schreiben

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z = p_r \cdot r. \quad (1,2)$$

Führen wir in der Funktion $F(xyz)$ die Variable r ein und machen wie bei der Lösung der Wellengleichung den bekannten Produktansatz

$$F(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi), \quad (1,3)$$

so geht (1,1) in

$$\Phi(p_r p_\vartheta p_\varphi) = \iiint P(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) e^{-i(p_r r)} dr \quad (1,4)$$

über, wobei noch das Volumenelement durch r , ϑ , φ auszudrücken ist. Die auf φ , ϑ bezügliche Größe können wir nun von dem R -Integral abtrennen und nehmen sie vor das Integral als Konstante C , d. h. als eine von r unabhängige Größe. Man erhält dann

$$\Phi(p) = C \int_0^\infty r^2 R(r) e^{-ip_r r} dr; \quad p = ip_r, \quad (1,5)$$

die eine zu r gehörige Impulsdarstellung, und zwar nicht der Funktion R selber, sondern der mit r^2 multiplizierten Funktion R ergibt. Das liegt bei dieser Darstellungsweise daran, daß wir die Transformation in den Impulsraum nur bezüglich der r -Koordinate vorgenommen haben. Man kann natürlich von der Funktion $\Phi(p_r)$ der Gleichung (1,5) zu unserer Darstellung in (I, 3) übergehen. Die Unterfunktion $\varphi(p)$ zu R ergibt sich aus (1,5) zu:

$$\Phi(p) = \frac{d^2}{dp^2} \mathfrak{L}[R]. \quad (1,6)$$

³⁾ Hylleraas, Z. Physik 74, 216 (1932).

Man kann dieses Resultat noch auf eine ganz andere Weise gewinnen, bei dem der physikalische Zusammenhang vielleicht noch etwas deutlicher wird. Wir gehen zu diesem Zweck von der üblichen Wellengleichung in r (I, 3,4) aus und führen folgende bekannte Operation ein:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r} = p_r \quad (1,7)$$

$$\hbar i \frac{\partial}{\partial p_r} = r. \quad (1,8)$$

Mit (1,7) erhält man aus (I, 3,4)

$$\left[\left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 p^2 + 2 \frac{i}{\hbar} \frac{1}{r} p + A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} \right] R = 0, \quad (1,9)$$

wobei man nun entweder p als Operator betrachten kann, der auf r wirkt, dann kommt man zur Ausgangsgleichung zurück, oder umgekehrt r als den Differentialoperator (1,8), der auf p wirkt. Bevor wir nun diese Operation ausführen, multiplizieren wir die Gleichung (1,9) noch von links mit r^γ , was zu

$$\left[\left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 r^\gamma p^2 + 2 \frac{i}{\hbar} r^{\gamma-1} p + A r^\gamma + 2 B r^{\gamma-1} + C r^{\gamma-2} \right] R = 0 \quad (1,10)$$

führt. Dabei ist bekanntlich wegen der Einwirkung von r auf p wohl zu unterscheiden zwischen einer von links bzw. rechts ausgeführten Multiplikation. Die Anwendung von (1,8) führt dann zu

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 (\hbar i)^\gamma \frac{\partial^\gamma}{\partial p^\gamma} (p^2 R) + 2 \frac{i}{\hbar} (\hbar i)^{\gamma-1} \frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial p^{\gamma-1}} (p R) \\ & + A (\hbar i)^\gamma \frac{\partial^\gamma R}{\partial p^\gamma} + 2 B (\hbar i)^{\gamma-1} \frac{\partial^{\gamma-1} R}{\partial p^{\gamma-1}} + C (\hbar i)^{\gamma-2} \frac{\partial^{\gamma-2} R}{\partial p^{\gamma-2}} = 0 \end{aligned} \quad (1,11)$$

und Ausführung der Differentialoperation zu

$$\begin{aligned} & \hbar^{\gamma-2} i^\gamma \{ -R^{(\gamma)} p^2 - \alpha R^{(\gamma-1)} 2p - \gamma(\gamma-1) R^{(\gamma-2)} + A \hbar^2 R^{(\gamma)} \\ & + 2 R^{(\gamma-1)} p + 2(\gamma-1) R^{(\gamma-2)} + 2 B \hbar i R^{\gamma-1} - C R^{(\gamma-2)} \} = 0. \end{aligned} \quad (1,12)$$

Die Gleichung (1,12) enthält drei Differentialquotienten verschiedener Ordnung,

$$R^{(\gamma)} = \frac{\partial^\gamma R}{\partial p^\gamma} \quad R^{(\gamma-1)} = \frac{\partial^{\gamma-1} R}{\partial p^{\gamma-1}} \quad R^{(\gamma-2)} = \frac{\partial^{\gamma-2} R}{\partial p^{\gamma-2}}. \quad (1,13)$$

Faßt man die entsprechenden zusammen, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left[p^2 + A \left(\frac{\hbar}{i} \right) \right] \frac{\partial^\gamma R}{\partial p^\gamma} + 2 \left[(\gamma-1) p - B \frac{\hbar}{i} \right] \frac{\partial^{\gamma-1} R}{\partial p^{\gamma-1}} \\ & + [2(\gamma-1) - \gamma(\gamma-1) - C] \frac{\partial^{\gamma-2} R}{\partial p^{\gamma-2}} = 0. \end{aligned} \quad (1,14)$$

Bisher haben wir über γ noch keine Voraussetzung gemacht. Wir können es, weil es eine von p unabhängige Größe ist, so wählen, daß der Koeffizient der niedrigsten Ableitung von R verschwindet. Man erhält dann:

$$\gamma = -l + 2 \quad (1;15)$$

und für die Differentialgleichung

$$\frac{d^{\gamma} R}{dp^{\gamma}} \left[p^2 + A \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \right] + \frac{\partial^{\gamma-1} R}{\partial p^{\gamma-1}} \cdot 2 \left[(\gamma-1) p - B \frac{\hbar}{i} \right] = 0, \quad (1,16)$$

wobei nunmehr γ einen der beiden Werte (1,15) besitzt. Bei dieser Betrachtungsweise ist nunmehr R immer als Funktion von p_r , nicht mehr wie in der früheren Wellengleichung (I, 3,4) als solche von r aufzufassen. Setzt man in (1,16) nun

$$\frac{\partial^{\gamma-1} R}{\partial p^{\gamma-1}} = P, \quad (1,17)$$

so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dP}{dp} \left[p^2 + A \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \right] + 2 \left[(\gamma-1) p - B \frac{\hbar}{i} \right] P = 0, \quad (1,18)$$

die nunmehr mit der von uns auf Grund der Laplace-Transformation erhaltenen Differentialgleichung (I, 3,15) formal übereinstimmt, wenn dort $F(0) = 0$ gesetzt wird. Es muß also auch bis auf einen konstanten Faktor, der uninteressant ist, die Funktion P mit unserer früher eingeführten Funktion $\varphi(p)$ übereinstimmen. Das dies tatsächlich der Fall ist, erkennt man auf folgende Weise. Sowohl bei der damaligen Betrachtung, wie auch bei der jetzigen gingen wir von der Wellenfunktion $R(r)$ aus und transformierten sie in eine Funktion von p bzw. p_r . Damals haben wir an Stelle der Funktion R die Funktion F durch die Beziehung

$$F = \frac{R}{r^{\alpha}} \quad (1,19)$$

eingeführt. In der jetzigen Betrachtung haben wir $R(p_r)$ durch die $\gamma-1$ -fache Differentiation nach p_r in P übergeführt (1,17). Dieser Differentiation entspricht aber im Koordinatenraum nach (1,8) eine Multiplikation mit $r^{\gamma-1}$. Setzt man nun die Funktion $P(p_r)$ identisch mit unserer früheren $g(p)$, so erhält man im R -Raum folgende Beziehung

$$\frac{R}{r^{\alpha}} = r^{\gamma-1} R. \quad (1,20)$$

Das Einsetzen der Werte für α (I, 3,12) ergibt für γ in der Tat die Werte (1,15). Mit der aus (1,20) folgenden Beziehung $\alpha = -\gamma + 1$ wird die Gleichung (1,18), wenn man noch die zwischen p_r und p geltende Relation beachtet, identisch mit der früheren Differentialgleichung für $\varphi(p)$, (I, 3,15). Es könnte Bedenken erregen, daß wir den Übergang von dem Operator $\frac{\partial}{\partial r}$ zu den Operatoren $\frac{\partial}{\partial p_r}$ in Gl. (I, 3,4) vornehmen und so die Impulsgleichung und Koordinatengleichung (1,9) erhalten. Man könnte meinen, daß man an Stelle von der Gleichung (1,9) von der „Energie“gleichung in Form

$$p^2 = p_r^2 + p_{\vartheta}^2 + p_{\varphi}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \quad (1,21)$$

ausgehen müßte. Es ist aber wohl bekannt, daß man durch eine naive Umformung dieser Gleichung nicht zu richtigen Resultaten kommt, weil die Nichtvertauschbarkeit von r und p verlangt, auf die Reihenfolge der Faktoren Rücksicht zu

nehmen. Wie dies zu machen ist, hat Sommerfeld⁴⁾ gezeigt. Wir sind diesen Schwierigkeiten dadurch entgangen, indem wir sofort von der „richtigen“ Gleichung (I, 3,4) ausgingen, in der schon die Reihenfolge der Faktoren richtig getroffen ist. Das zweite, die imaginäre Einheit enthaltende Glied der Gl. (I,9) rührt von dieser Nichtvertauschbarkeit der Operatoren r und p_r her.

Die vorstehende Behandlungsweise zeigt in extenso, daß die Anwendung der Laplace-Transformation auf die r -Koordinate im wesentlichen einer Transformation gemäß (I,7)⁵⁾ und (I,8) also dem Übergang von dem r -Raum zu dem p_r -Raum entspricht. Man erhält also dieselbe Gleichung wie bei Anwendung der Laplace-Transformation, nur hat letztere den Vorzug, daß bei ihrer Anwendung alle in (I, 2) aufgeführten Hilfsformeln zur Verfügung stehen.

Man kann schließlich noch die Differentialgleichung (I, 3,15), die mit (I,18) übereinstimmt, auf eine dritte Weise gewinnen. Dazu gehen wir von (I, 3,4) aus und wenden auf diese direkt die Laplace-Transformation (I,1) an, ohne also vorher in der ursprünglichen Differentialgleichung (I, 3,4) R durch (I, 3,8) ersetzt zu haben. Dieses Ersetzen geschah zu dem Zwecke, die Glieder mit $\frac{1}{r^2}$ zum Verschwinden zu bringen, um so nach der \mathcal{Q} -Transformation eine Differentialgleichung erster Ordnung zu erhalten. Bei Anwendung der \mathcal{Q} -Transformation auf die mit r^2 multiplizierte Gl. (I, 3,4) erhält man im Unterbereich die Differentialgleichung

$$(p^2 + A) \frac{d^2 \varphi}{dp^2} + 2(p - B) \frac{d\varphi}{dp} + C\varphi = 0, \quad (1,22)$$

die aber in p von zweiter Ordnung ist. Wendet man nunmehr auf (1,22) von links den Operator

$$L^{(\alpha)} = \frac{d^{\alpha}}{dp^{\alpha}} \quad (1,23)$$

an, so erhält man

$$(p^2 + A) \frac{d^{\alpha+2} \varphi}{dp^{\alpha+2}} + [2\alpha p + 2(p - B)] \frac{d^{\alpha+1} \varphi}{dp^{\alpha+1}} + \{\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha + C\} \frac{d^{\alpha} \varphi}{dp^{\alpha}} = 0 \quad (1,24)$$

und kann die zunächst noch unbestimmt gelassene Ordnung der Differentiation so wählen, daß das Glied in (1,24), das den Differentialquotienten von der Ordnung α enthält, verschwindet. Die Bedingung dafür ist wieder

$$\alpha = \begin{cases} -(\ell + 1) \\ +\ell \end{cases} \quad (1,25)$$

Mit ihr erhält man die Differentialgleichung

$$(p^2 + A) \frac{d^{\alpha+2} \varphi}{dp^{\alpha+2}} + 2(\alpha p + p - B) \frac{d^{\alpha+1} \varphi}{dp^{\alpha+1}} = 0, \quad (1,26)$$

die mit der ursprünglichen Differentialgleichung (I, 3,15) des Unterbereiches

⁴⁾ A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien S. 724, Fr. Vieweg, Braunschweig 1931.

identisch wird, wenn man als neue Funktion $G(p)$

$$\frac{d^{\alpha+1} \varphi}{dp^{\alpha+1}} = G(p) \quad (1,27)$$

einführt.

Man kann von der Möglichkeit, die Differentialgleichung zweiter Ordnung in eine erster Ordnung zu überführen, unter Umständen auch im Oberbereich Gebrauch machen und so versuchen, schon dort eine ähnliche Darstellung zu finden. Dies ist uns für den Fall des Wasserstoffatoms nicht gelungen. Es läßt sich die Differentialgleichung (I, 3,4) in dieser Weise nicht reduzieren, wohl aber gelingt es in anderen Fällen, eine solche Reduktion schon im Oberbereich durchzuführen. Sie hat aber, wie wir sehen werden, den Nachteil, daß sie nur für ganz bestimmte Werte der Koeffizienten der Differentialgleichung möglich ist, weil nämlich der Differential-Operator (1,23) zunächst nur für ganzzahlige α definiert ist. Auch hier hilft die Laplace-Transformation weiter und ermöglicht eine Reduktion für beliebige Werte von α (siehe Abschnitt 2).

Eine ähnliche Darstellung für die Koordinate ϑ haben wir nicht gefunden. Hier läßt sich die Differentialgleichung der Kugelfunktionen nicht in einfacher Weise reduzieren. Auch ist die Verwendung der Formel (I, 1,1) der Laplace-Transformation nicht ohne weiteres möglich, da die Koordinate ϑ nicht von 0 bis ∞ läuft. Man müßte erst eine geeignete Koordinatentransformation einführen. Z. B. lassen sich bei Verwendung von parabolischen Ort-Koordinaten die Eigenfunktionen der zugehörigen Impulskoordinaten mit unserer Methode für alle Freiheitsgrade ermitteln, worauf an späterer Stelle noch eingegangen werden soll.

2.

Um unser Verfahren zu erklären, sei es gestattet, es vielleicht einleitend an einem bekannten Beispiel, nämlich an Hand der Differentialgleichung der Hermiteschen Polynome zu erläutern. Obwohl wir damit im wesentlichen nichts Neues bringen, wird sich gerade bei der Behandlung dieses Problems die Handhabung und der Vorzug der Laplace-Transformation besonders deutlich zeigen. Die Differentialgleichung der Hermiteschen Polynome lautet:

$$y'' - x y' + n y = 0. \quad (2,1)$$

Man kann diese Gleichung durch Anwendung des Differentialoperators $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ von links schon im Raum der Koordinate x auf eine Differentialgleichung erster Ordnung reduzieren und erhält dann

$$y^{(\alpha+2)} - x y^{(\alpha+1)} - \alpha y^{\alpha} + n y^{\alpha} = 0. \quad (2,2)$$

Wählt man $\alpha = n$, so fällt das Glied, das den Differentialquotienten der Ordnung α enthält, fort und führt man mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{d^{\alpha+1} y}{dx^{\alpha+1}} = Y \quad (2,3)$$

die neue Funktion Y ein, so ergibt sich für diese die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dY}{dx} = x Y, \quad (2,4)$$

die

$$Y = C e^{\frac{x^2}{2}} \quad (2,5)$$

zur Lösung hat.

Durch $(\alpha + 1)$ -fache Integration dieser Gleichung erhält man für y

$$y = C \int_0^x d\xi_\alpha \int_0^{\xi_\alpha} d\xi_{\alpha-1} \cdots \int_0^{\xi_1} e^{-\frac{\xi_1^2}{2}} d\xi_0 + \cdots \psi(x), \quad (2,6)$$

wobei $\psi(x)$ von der Form

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^n C_i \cdot x^i \quad (2,7)$$

ist, mit $(\alpha + 1)$ willkürlichen Konstanten C_0 bis C_α . Im ganzen treten also $(\alpha + 2)$ willkürliche Konstanten auf, von denen sich aber bis auf zwei alle aus der ursprünglichen Differentialgleichung bzw. ihrer Differentiation nach x bestimmen lassen. Setzt man in (3,6) $C = 0$, so erhält man das Polynom (2,7) n -ten Grades, das mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert ist. Die übrigen Konstanten sind aber bestimmt. Diese stellen die bekannten Hermiteschen Polynome dar. Setzt man $C \neq 0$, so erhält man noch Lösungen von der Form

$$y = C \int_0^x d\xi_\alpha \int_0^{\xi_\alpha} d\xi_{\alpha-1} \cdots \int_0^{\xi_1} e^{-\frac{\xi_1^2}{2}} d\xi_0 + \cdots \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (2,8)$$

mit nunmehr bestimmten Koeffizienten a_i , die nach Vorgabe eines beliebigen C berechnet werden können, indem man mit (2,6) wieder in die Differentialgleichung (2,1) eingeht und dann z. B. für $x = 0$ die Konstantenbestimmung vornimmt. (2,8) sind die sogenannten Hermiteschen Funktionen zweiter Art. Dieses Verfahren erlaubt also die Hermitesche Differentialgleichung zweiter Ordnung in eine solche erster Ordnung zu verwandeln und aus dieser kann man die Lösung ohne jede Schwierigkeiten entnehmen. Dieses Verfahren ist aber nur anwendbar, wenn

n eine ganze Zahl ist, da nur dann der Differential-Operator $\frac{d^2}{dx^2}$ im Riemannschen Sinne definiert ist. Für nicht ganzzahliges n versagt es, dagegen gestattet die Anwendung der Laplace-Transformation, die Lösung sofort hinzuschreiben, denn die \mathfrak{L} -Operation auf (2,1) ausgeübt, ergibt unmittelbar die Differentialgleichung erster Ordnung

$$p \frac{dp}{dp} + (p^2 + n + 1)\varphi = p y(0) + y'(0) \quad (2,9)$$

im Unterbereich. Wir müssen hier allerdings noch die einschränkende Bedingung machen, daß die Funktion y nur für positive x von 0 verschieden ist. Wir werden uns von dieser Einschränkung am Schluß der Betrachtung frei machen. In (2,9) treten jetzt noch zwei nicht bekannte Konstanten auf, nämlich $y(0)$ und $y'(0)$. Daß letzteres der Fall ist, während früher (I, 3,15) nur das dem Wert $y(0)$ entsprechende $F(0)$ auftrat, liegt daran, daß (I, 3,15) aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung hergeleitet wurde, deren zweite Ableitung noch mit r multipliziert war, welche im Unterbereich einer Differentiation nach p entspricht. Bei

dieser fiel das Glied $F'(0)$ fort, während es hier erhalten bleibt. Als Lösung von (2,9) findet man

$$\varphi = C \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{p^{n+1}} + \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{p^{n+1}} y(0) \int p^{n+1} e^{\frac{p^2}{2}} dp + \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{p^{n+1}} y'(0) \int p^n e^{\frac{p^2}{2}} dp \quad (2,10)$$

mit zunächst noch drei Konstanten, nämlich C , $y(0)$ und $y'(0)$. Um die Funktion im Oberbereich kennen zu lernen, gehen wir hier am zweckmäßigsten so vor, daß wir eine asymptotische Entwicklung für $p \rightarrow \infty$ vornehmen und dann mit der bekannten \mathfrak{G}^{-1} -Transformationsformel (I, 1,4) die Oberfunktion aufsuchen, wobei diese ja von dem Wert c der Integrations-Grenzen unabhängig ist.

Wir beginnen aus gleich zu ersiehenden Gründen mit dem die beiden Anfangswerte $y(0)$ und $y'(0)$ enthaltenden Anteil der allgemeinen Lösung (2,10) und setzen zunächst n als ganzzahlig voraus. Dann gilt

$$\frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{p^{n+1}} y(0) \int p^{n+1} e^{\frac{p^2}{2}} dp = \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{p^{n+1}} y(0) \int p^n e^{\frac{p^2}{2}} d \frac{p^2}{2} \quad (2,11)$$

$$= \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{p^{n+1}} y(0) \left[p^n e^{\frac{p^2}{2}} - n \int p^{n-1} e^{\frac{p^2}{2}} d \frac{p^2}{2} \right] \quad (2,12)$$

$$= y(0) \frac{1}{p} - \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{p^{n+1}} y(0) \int p^{n-2} e^{\frac{p^2}{2}} d \frac{p^2}{2} \quad (2,13)$$

$$= y(0) \left[\frac{1}{p} - \frac{n}{p^3} + \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{p^{n+1}} y(0) n(n-1) \int p^{n-4} e^{\frac{p^2}{2}} d \frac{p^2}{2} \right] \quad (2,14)$$

und weitere Integration führt ersichtlich zu einer Potenzreihe in $\frac{1}{p}$, die offenbar abbricht, wenn n gerade ist, weil dann nach $\frac{n}{2}$ Schritten ein Glied der Form

$$\int p e^{\frac{p^2}{2}} dp = \int e^{\frac{p^2}{2}} d \frac{p^2}{2} = e^{\frac{p^2}{2}} \quad (2,15)$$

auftritt. Dann gestattet indessen das andere in (2,10) auftretende Integral, das nur die Potenz p^n enthält, keine derartige Darstellung mit endlich vielen Gliedern, weil jenes nach derselben Anzahl von entsprechenden Umformungen die Gestalt

$$\int e^{\frac{p^2}{2}} dp = \int \frac{e^{\frac{p^2}{2}}}{p} d \frac{p^2}{2} \quad (2,16)$$

annimmt und hier weitere partielle Integration die Exponenten von p im Nenner stets erhöht, also zu Integralen führt, die nicht geschlossen darstellbar sind. Man erhält also (immer noch bei vorausgesetztem geraden n) aus dem ersten Integral in (2,10) eine endliche abbrechende Potenzreihe in $\frac{1}{p}$ und aus dem anderen eine

unendliche:

$$\varphi(p) = C^0 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{p^{n+1}} + y(0) \sum_{i=0}^{n/2} \frac{a_i}{p^{2i+1}} + y'(0) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{p^{2i}}. \quad (2,17)$$

wobei

$$a_0 = b_1 = 1 \quad (2,18)$$

sind. Eine derartige Darstellung ist aber auch dann möglich, wenn der andere Fall, nämlich daß n ungerade ist, eintritt, da dann offenbar das erste Integral die unendliche und das zweite die endliche Potenzreihe von $\frac{1}{p}$ liefert. Gl. (2,10) ist also immer in die Form (2,17) überzuführen. Der Wert der Konstanten C muß nun so bestimmt werden, daß nach Übergang in den Oberbereich die Größen $y(0)$ und $y'(0)$ die gewünschten Anfangswerte der Oberfunktion darstellen, was ersichtlich nur dann der Fall ist, wenn $C = 0$ wird⁵⁾. Die \mathcal{Q}^{-1} -Transformation von (2,17) ergibt zwei voneinander unabhängige Lösungen, von denen das Polynom die üblichen Hermiteischen und die unendliche Reihe die Hermiteischen Funktionen 2. Art sind. Für gerade n ist der $y(0)$, für ungerade n der $y'(0)$ enthaltende Ausdruck das gewöhnliche Hermiteische Polynom. Nach genau demselben Verfahren kann man aber die Lösung auch für gebrochene n erhalten. Dann ergeben sich natürlich keine Polynome mehr, weil sich die Integrale niemals exakt ausrechnen lassen. Man bekommt jedoch eine Entwicklung nach $\frac{1}{p}$, die man wieder durch gliedweise Rücktransformation in den Oberbereich durch Potenzreihen darstellen kann, wobei entsprechend den beiden willkürlichen Konstanten $y(0)$ und $y'(0)$ zwei voneinander unabhängige Potenzreihen-Entwicklungen auftreten.

Wir können uns nunmehr auch noch von der eingangs gemachten Bedingung frei machen, daß wir Lösungen, die nur für $x > 0$ von 0 verschieden sind, betrachten. Da nämlich die ursprüngliche Differentialgleichung (2,1) bezüglich der Veränderlichen x im vorliegenden Fall gerade ist, erhält man auch für die Variable $x^* = -x$ genau die entsprechenden Lösungen. Durch Addition kann man die gewünschte Lösung dann herstellen, wenn man als physikalische Bedingung der Zusammensetzung der Lösungen Stetigkeit von y und y' verlangt.

Es läßt sich also die Gesamtheit der Lösungen des vorliegenden Problems unmittelbar aus (2,10) durch Entwicklung nach großen p entnehmen, wobei nur Gl. (I, 3,4) benutzt wird.

3.

Wir wollen nun dazu übergehen, nach dem eben angezeigten Verfahren die Lösung der Wellengleichung für das Wasserstoffatom in voller Allgemeinheit anzugeben.

⁵⁾ Wären die partiellen Integrationen nicht unbestimmt, sondern mit einer bestimmten unteren Grenze vorgenommen worden, dann wäre C nicht Null zu setzen, sondern so zu wählen gewesen, daß $y(0)$ bzw. $y'(0)$ tatsächlich Anfangswerte werden, C ist also immer so zu bestimmen, daß die Bedeutung auftretender Konstanten im Oberbereich gewahrt bleibt.

Zu diesem Zweck machen wir uns von der Bedingung $F(0) = 0$ (I, 3,18) frei und gehen auch dadurch einen Schritt weiter, daß wir jetzt nicht den Punkt $r = 0$ als Anfangspunkt wählen, sondern einen beliebigen $r = a \neq 0$.

Wir betrachten also jetzt eine Funktion, die für $r > a$, der Wellengleichung (I, 3,4) genügt und für alle übrigen Werte von r verschwindet. Wir suchen Funktionen, die von den üblichen Lösungen der Wellengleichung dargestellt werden, bei denen aber der zwischen $r = 0$ und $r = a$ gelegene Teil abgeschnitten ist. Wir haben dieses Problem so formuliert, um die Lösung der Wellengleichung insbesondere mit Hilfe der Asymptotik nicht nur in den Punkten $r = 0$ und $r = \infty$ zu gewinnen, sondern auch für einen beliebig dazwischen liegenden Punkt $r = a$ angeben zu können. Dies ist besonders wichtig bei der Bestimmung der Nullstellen der Wellenfunktion. Es wird sich zeigen, daß man auf diese Weise z. B. die Nullstellen der Lösungen im Oberbereich direkt aus dem Unterbereich entnehmen kann. Wir gehen zu diesem Zweck von der Gleichung (I, 3,14) aus und führen die neue Variable $\bar{\varrho}$ durch die Gleichung

$$\varrho = \bar{\varrho} + \bar{a} \quad (3,1)$$

ein. Dabei bedeutet $\bar{a} = \frac{2a}{r_0}$ (s. Gl. I, 3,9). Dies in Gleichung (I, 3,14) eingesetzt führt zu

$$\bar{\varrho} \bar{F}'' + \bar{a} \bar{F}' + 2(\alpha + 1) \bar{F}' + \left(\beta - \frac{\bar{\varrho}}{4} \right) \bar{F} - \frac{\bar{a}}{4} \bar{F} = 0. \quad (3,2)$$

Unterwirft man diese Gleichung der Laplace-Transformation, so erhält man

$$\frac{d\varphi}{d\bar{p}} \left\{ -\bar{p}^2 + \frac{1}{4} \right\} + \left[\bar{a} \bar{p}^2 + 2\alpha \bar{p} + \beta - \frac{\bar{a}}{4} \right] \varphi = [\bar{a} \bar{p} + 2\alpha + 1] \bar{F}(0) + \bar{a} \bar{F}'(0), \quad (3,3)$$

die sich von der früheren Gleichung (I, 3,15) durch die Glieder

$$\dots + \left(\bar{a} \bar{p}^2 - \frac{\bar{a}}{4} \right) \varphi = \bar{a} \bar{p} \bar{F}(0) + \bar{a} \bar{F}'(0) \dots \quad (3,4)$$

unterscheidet. Die Variable \bar{p} ist nunmehr die Unterbereichs-Variable zu $\bar{\varrho}$, ist also wohl von p zu unterscheiden. Die Größen $\bar{F}(0)$ und $\bar{F}'(0)$ sind zunächst willkürliche bzw. noch näher zu bestimmende Konstanten, die die Größen der Wellenfunktion bzw. der Werte $R : \varrho^\alpha$ an der Stelle $r = a$ bestimmen. Es gilt also (I, 3,8)

$$F(\varrho) = \frac{R}{\varrho^\alpha} \quad (3,5)$$

$$\bar{F}(\bar{\varrho}) = \frac{R(\bar{\varrho} + \bar{a})}{(\bar{\varrho} + \bar{a})^\alpha} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für} \\ \bar{\varrho} > 0 \text{ d. h.} \\ r > a \end{array} \right\} \quad (3,6)$$

$$\bar{F}(0) = \frac{R(\bar{a})}{\bar{a}^\alpha} \quad (3,7)$$

$$\bar{F}'(0) = \frac{R'(\bar{a})}{\bar{a}^\alpha} - \alpha \frac{R(\bar{a})}{\bar{a}^{\alpha+1}}. \quad (3,8)$$

Die allgemeine Lösung von (3,2) ergibt sich zu $\varphi = \varphi_h + \varphi_i$ mit

$$\varphi_h = C \epsilon^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{\left(\bar{p} - \frac{1}{2} \right)^{\beta+\alpha}}{\left(\bar{p} + \frac{1}{2} \right)^{\beta-\alpha}} \quad (3,9)$$

$$\varphi_i = -e^{a\bar{p}} \frac{(\bar{p} - \frac{1}{2})^{\beta+\alpha}}{(\bar{p} + \frac{1}{2})^{\beta-\alpha}} \int [\bar{a} \bar{F}(0) \bar{p} + (2\alpha + 1) \bar{F}(0) + \bar{a} \bar{F}'(0)] \cdot e^{-a\bar{p}} \frac{(\bar{p} + \frac{1}{2})^{\beta-\alpha-1}}{(\bar{p} - \frac{1}{2})^{\beta+\alpha+1}} d\bar{p}. \quad (3,10)$$

Der erste Teil stellt die Lösung der homogenen Gleichung dar, der zweite ein partikuläres Integral der inhomogenen. In dieser Lösung treten drei Konstanten auf, während die Lösung der Wellengleichung sicherlich nur zwei willkürliche Konstanten enthalten kann. Wir werden aber später sehen, daß sich C in Analogie zum Vorhergehenden bestimmen läßt.

Wir untersuchen zunächst das Verhalten der Lösungen im \bar{p} -Raum bzw. im \bar{q} -Raum für die Werte $\bar{p} = 0$ und $\bar{p} = \infty$ mit Hilfe der Asymptotik unter Verwendung der Formeln (I, 2,9) bis (I, 2,18). Für den einfachsten Fall $a = 0$, $\bar{F}(0) = 0$ und β ganzzahlig haben wir das Problem schon in Arbeit I, Abschnitt 3 erledigt. Für diesen Fall verschwindet das partikuläre Integral (3,10) der Lösung. Die übrigen Lösungen der Wellengleichung erhält man in ganz analoger Weise wie in Arbeit I, Abschnitt 3, nur daß man diese Betrachtungen jetzt mit den Lösungen (3,9) und (3,10) durchführt.

Wie verhalten sich die Lösungen der Wellengleichungen im Nullpunkt und im Unendlichen, wenn β einen beliebigen Wert hat, und welches sind die beiden voneinander unabhängigen Lösungen, die (I, 3,4) als Differentialgleichung zweiter Ordnung ja aufweisen muß? Zur Beantwortung dieser Frage behalten wir jetzt $F(0) \neq 0$ in der Lösung (3,10) bei und untersuchen zunächst den Spezialfall

$$A) \bar{a} = 0, \text{ aber } \bar{F}(0) = F(0) \neq 0.$$

Dabei wählen wir nun von vornherein für α den Wert $-(l+1)$, bemerken aber, daß sich für den anderen Wert $\alpha = l$ die Betrachtungen entsprechend durchführen lassen. Wir setzen nun allgemein

$$\beta = n + \varepsilon \quad n \text{ ganz } 0 \leq \varepsilon < 1. \quad (3,11)$$

Für den Nullpunkt des Koordinatenraumes r ist die Entwicklung für $\bar{p} = 0$ maßgeblich. Es ergibt sich in diesem Fall

$$\varphi = \frac{C}{\bar{p}^{2(l+1)}} [1 + \dots] + \frac{\bar{F}(0)}{\bar{p}} + \dots \quad (3,12)$$

Das erste Glied stellt die Entwicklung des homogenen Anteils dar, das zweite Glied die Entwicklung des Integrals (3,10). Das gibt im Nullpunkt des Oberbereiches eine Entwicklung von folgender Form

$$\bar{F} \sim \bar{F}(0) + \dots \quad (3,13)$$

Sie fängt mit einem konstanten Glied $\bar{F}(0)$ an, während alle übrigen Glieder positive Potenzen von \bar{q} enthalten. D. h. also, daß in der Tat die Konstante $\bar{F}(0)$ den Wert der Funktion \bar{F} im Punkte $\bar{q} = 0$ darstellt, wie es verlangt war. Weiter ergibt (3,13), daß keine Beziehung zwischen C und $\bar{F}(0)$ besteht, da die mit C behafteten Glieder im Oberbereich immer einen Faktor von \bar{q} mit positiven Exponenten enthalten. Infolgedessen können wir C und $\bar{F}(0)$ vollkommen willkürlich wählen. Die Lösung $\varphi(\bar{p})$ zerfällt in die zwei voneinander unabhängigen

Teile (3,9) und (3,10), denen im Oberbereich entsprechend, wenn man von \bar{F} noch zu R übergeht:

$$R \sim \frac{1}{\varrho^{l+1}} \{ C \bar{\varrho}^{2l+1} + \dots \} \quad (3,14)$$

$$R \sim \frac{1}{\varrho^{l+1}} \{ \bar{F}(0) + \dots \}. \quad (3,15)$$

Gl. (3,14) gibt also im Oberbereich die Lösungen R der Wellengleichung, die für $\bar{\varrho} = 0$ endlich bleibt. Die Funktion (3,15) ist die Lösung R , welche im Nullpunkt unendlich wird.

Wir betrachten nun das Verhalten der Oberfunktion für $\bar{\varrho} = \infty$. Hier wird das Verhalten durch die Entwicklung der Unterfunktion in der Umgebung derjenigen ihrer Nullstellen \bar{p} bestimmt, bei denen $\bar{p} - \bar{p}_0$ mit gebrochenem Exponenten auftritt bzw. durch die Entwicklung in der Umgebung ihrer Pole, siehe (I, 2,13) in Verbindung mit (I, 2,16), wobei negative ganzzahlige Werte von β ausgeschlossen sind. Die Lösung (3,9) zeigt*) in der Nähe der Stelle $\bar{p}_0 = +\frac{1}{2}$ die Entwicklung

$$\varphi_h = C \left(\bar{p} - \frac{1}{2} \right)^{\beta-l-1} - \binom{\beta+l+1}{1} C \left(\bar{p} - \frac{1}{2} \right)^{\beta-l} + \binom{\beta+l+1}{2} C \left(\bar{p} - \frac{1}{2} \right)^{\beta-l+1} + \dots \quad (3,16)$$

allgemein mit positiven gebrochenen Exponenten der Glieder $\bar{p} - \frac{1}{2}$. Das besagt,

daß die Oberfunktion wie $e^{\frac{\bar{\varrho}}{2}}$ verläuft. Nur für den Fall $\varepsilon = 0$ liegt eine Entwicklung mit ganzen Potenzen vor, und es wird infolgedessen nicht die Nullstelle am Punkte $\bar{p} = +\frac{1}{2}$, sondern der Pol an der Stelle $\bar{p}_0 = -\frac{1}{2}$ für das Verhalten im Unendlichen maßgeblich. D. h. die Lösungen mit ganzzahligen β gehen

wie $e^{\frac{\bar{\varrho}}{2}}$ ins Unendliche. Das sind die schon besprochenen Eigenfunktionen.

Die von diesen Lösungen unabhängigen Funktionen (3,10) zeigen genau das umgekehrte Verhalten⁷⁾. Die Entwicklung an der Stelle $\bar{p}_0 = +\frac{1}{2}$ ergibt sich zu

$$\varphi(p) \sim -(2\alpha + 1) \bar{F}(0) \left[-\frac{1}{\beta + l + 1} - \binom{\beta + l + 1}{1} \bar{p} + \dots \right]. \quad (3,17)$$

Hier treten nur ganzzahlige Exponenten auf: für $\varepsilon \neq 0$, weil sich ein Faktor ϱ^ε immer im Zähler und Nenner forthebt. Also treten für $\varepsilon \neq 0$ an der Stelle $\bar{p}_0 = +\frac{1}{2}$ nur Nullstellen mit ganzzahligen Exponenten auf und für das Verhalten der Oberfunktion an der Stelle $\bar{\varrho} = \infty$ ist das Verhalten von (3,10) in der Umgebung des

Punktes $\bar{p}_0 = -\frac{1}{2}$ maßgeblich. Die Oberfunktion verläuft also wie $e^{-\frac{\bar{\varrho}}{2}}$.

Für $\varepsilon = 0$ — und nur für diesen Wert — tritt aber etwas Besonderes ein. Die Entwicklung von (3,10) an der Stelle $\bar{p}_0 = +\frac{1}{2}$ enthält wegen des darin auftretenden Integrals ein logarithmisches Glied, welches nicht zum Verschwinden zu bringen ist. Infolgedessen geht nach (I, 2,14) in Verbindung mit (I, 2,17) die Ober-

funktion wieder wie $e^{\frac{\bar{\varrho}}{2}}$ ins Unendliche, wird also dort selber ∞ . Diese Singularität läßt sich nur dann vermeiden, wenn man $\bar{F}(0) = 0$ setzt und somit über den noch

*) Vgl. Arbeit I, Abschnitt 3.

7) Bez. einer genaueren Behandlung dieses Integrals und der Wahl der Integrationsgrenzen vgl. eine demnächst weitere Arbeit zu diesem Thema.

willkürlich zur Verfügung stehenden Koeffizienten verfügt. Es sind also die Lösungen (3,14) die einzigen, bei denen die Funktionen R sowohl im Nullpunkt als auch im Unendlichen endlich bleiben.

Man erhält auf diese Weise mit Hilfe der Asymptotik ohne weiteres das bekannte Resultat der Schrödingerschen Wellengleichung. Für β nicht ganzzahlig ist die eine unabhängige Lösung im Nullpunkt ∞ , im Unendlichen aber endlich. Die andere Lösung ist im Nullpunkt endlich, im Unendlichen aber ∞ . Für ganzzahlige Werte von β aber ist die eine unabhängige Lösung sowohl im Nullpunkt wie im Unendlichen endlich und die andere unabhängige Lösung sowohl im Nullpunkt wie auch im Unendlichen ∞ .

$$\text{B) } \bar{u} \neq 0, \text{ aber } \bar{F}(0) = F(a) = 0.$$

Wir wollen nun zur Betrachtung des Falles übergehen, bei dem $\bar{u} \neq 0$ ist. Im allgemeinen ist dann auch

$$\bar{F}(0) = F(a) \neq 0. \quad (3,18)$$

Das gleiche gilt für $\bar{F}'(0) = F'(a)$. Diese Größen stellen eben die Werte der Funktion F und ihrer Ableitung an der Stelle $\varrho = \bar{a}$ dar. Wir wollen nun den Spezialfall herausgreifen, daß dieses so gewählte \bar{a} eine Nullstelle von F ist. Das besagt also $\bar{F}(0) = F(\bar{a}) = 0$. Ferner wollen wir gleich von vornherein β als ganzzahlig ansetzen, welche Werte wir ja schon aus der vorausgegangenen Betrachtung als Eigenwerte kennen. Denn da die Funktionen \bar{F} mit den Funktionen F für $\varrho = \varrho + \bar{a}$ identisch sind, ergeben sich dieselben Bedingungen für die Endlichkeit im Unendlichen. Wir wollen also nun für diese Eigenfunktionen die Nullstellen dadurch bestimmen, daß wir die Bedingung stellen, daß unsere neue Funktion F , die erst in dem Punkt \bar{a} beginnt, den Anfangswert

$$\bar{F}(0) = 0 \quad (3,19)$$

hat. Die zu dieser Anfangsbedingung gehörige Lösung ergibt sich aus (3,9) und (3,10) zu

$$\varphi = C e^{a\bar{p}} \left(\bar{p} - \frac{1}{2}\right)^{\beta+\alpha} - \bar{u} \bar{F}'(0) e^{a\bar{p}} \left(\bar{p} + \frac{1}{2}\right)^{\beta-\alpha} \int e^{-a\bar{p}} \left(\bar{p} + \frac{1}{2}\right)^{\beta-\alpha-1} d\bar{p} \quad (3,20)$$

mit zwei unabhängigen Konstanten C und $\bar{F}'(0) = F'(\bar{a})$. Wir bestimmen zunächst das Verhalten der Oberfunktion im Unendlichen durch Entwicklung an der Stelle $\bar{p} = +\frac{1}{2}$. Entwickelt man die Lösung (3,20) an dieser Stelle, so enthält der homogene Anteil mit der Konstanten C an dieser Stelle keine Singularitäten, keine Pole und keine Potenzen $(\bar{p} - \frac{1}{2})^n$ mit positiv gebrochenem n . Dieses Glied liefert also keinen endlichen Beitrag im Unendlichen des Oberbereiches. Das inhomogene Glied führt an dieser Stelle zu der folgenden Entwicklung:

$$\varphi \sim -\bar{u} \bar{F}'(0) \cdot \left(\bar{p} - \frac{1}{2}\right)^{\beta+\alpha} \left[1 + (\beta - \alpha) \left(\bar{p} - \frac{1}{2}\right) \dots\right] \cdot e^{a\bar{p}} \int \left(\bar{p} - \frac{1}{2}\right)^{\beta-\alpha-1} [1 (\beta - \alpha - 1) \left(\bar{p} - \frac{1}{2}\right) \dots] e^{-a\bar{p}} d\bar{p} \quad (3,21)$$

mit

$$-\beta - \alpha - 1 < 0 \text{ und ganzzahlig.} \quad (3,22)$$

φ besitzt an der Stelle $\bar{p}_0 = \frac{1}{2}$ keine Pole und keine Potenzen von $(\bar{p} - \frac{1}{2})^n$ mit positiv gebrochenem n . Als einzige Singularitäten bleiben nach Ausführung der

Integration von (3,21) Integrale von der Form bestehen:

$$\int \frac{e^{-\bar{a}\bar{p}}}{\bar{p}} d\bar{p} \quad (3,22a)$$

(dabei denken wir uns die Grenzen des Integral-Logarithmus so gewählt, daß für diesen an der Stelle $\bar{p} = \frac{1}{2}$ die Entwicklung

$$Ei(-\bar{a}\bar{p}) = \int \frac{e^{-\bar{a}\bar{p}}}{\bar{p}} d\bar{p} = \ln |\bar{a}\bar{p}| - \frac{\bar{a}\bar{p}}{1!} + \frac{(\bar{a}\bar{p})^2}{2(2!)} - \frac{(\bar{a}\bar{p})^3}{3(3!)} + \dots \quad (3,23)$$

gilt, d. h. daß die Euler-Mascheronische Konstante verschwindet. Dies ist für die folgende Betrachtung von Bedeutung).

Die einzige Singularität an der Stelle $\bar{p} = \frac{1}{2}$ stellt also der Logarithmus dar, und der bedeutet nach Formel (I, 2,14) in Verbindung mit (I, 2,17) für die Funk-

tion des Oberbereiches im Unendlichen einen Verlauf wie $e^{\frac{\bar{a}}{2}}$. Soll das nicht der Fall sein, müssen alle logarithmischen Glieder verschwinden, also der Faktor dieses Gliedes 0 werden. Das gibt eine Bedingung für \bar{a} . Es könnte merkwürdig erscheinen, daß hier für das Endlichbleiben der Eigenfunktion im ∞ nicht wie bei der früheren Betrachtungsweise eine Bedingung für β herauskommt. Dies liegt daran, daß wir bei dieser Betrachtung von vornherein nur ganzzahlige β zugelassen haben. Infolgedessen sind in unseren Lösungen nur die auf Seite 316 erwähnten enthalten, nämlich eine, die im Punkt $\varrho = 0$ und für $\varrho = \infty$ endlich bleibt, während die andere sowohl für $\varrho = 0$ wie auch für $\varrho = \infty$ unendlich wird. Wir suchen nun die Nullstellen der Funktionen, die im Unendlichen endlich bleiben. Durch die Bedingung, daß die Funktion F im Unendlichen endlich bleibt, wird also tatsächlich die Nullstelle festgelegt, denn dadurch wird ja von den zwei zur Verfügung stehenden Funktionen die eine schon ausgesondert. Es ist also in der Tat zu erwarten, daß für diesen Spezialfall das Endlichbleiben im Unendlichen eine Bedingung für die Lage der Nullstelle der Oberfunktionen ergibt.

Die Ausführung der Berechnung des Koeffizienten des logarithmischen Gliedes führt zu

$$\begin{aligned} & \int \frac{e^{-\bar{a}\bar{p}}}{\bar{p}^{\beta+\alpha+1}} \left[1 + \binom{\beta-\alpha-1}{1} \bar{p} + \binom{\beta-\alpha-1}{2} \bar{p}^2 + \dots \right] d\bar{p} \\ &= \frac{(-\bar{a})^{\beta+\alpha} Ei(-\bar{a}\bar{p})}{(\beta+\alpha)!} + \frac{(-\bar{a})^{\beta+\alpha-1} (\beta-\alpha-1) Ei(-\bar{a}\bar{p})}{(\beta+\alpha-1)!} \\ &+ \frac{(-\bar{a})^{\beta+\alpha-2} \binom{\beta-\alpha-1}{2} Ei(-\bar{a}\bar{p})}{(\beta+\alpha-2)!} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3,24)$$

was nach einiger Umformung übergeführt wird in

$$(-1)^{\beta+\alpha} Ei(-\bar{a}\bar{p}) \left\{ \frac{\bar{a}^{\beta+\alpha}}{(\beta+\alpha)!} - \frac{\bar{a}^{\beta+\alpha-1} (\beta-\alpha-1)}{(\beta+\alpha-1)!} + \dots \right\} = 0. \quad (3,25)$$

Hieraus schließt man auf das Verschwinden des Klammersausdrucks, der eine Bedingungsgleichung für \bar{a} darstellt. Daß diese mit den Nullstellen der Laguerreschen Polynome übereinstimmt, erkennt man daraus, daß $\{ \}$ in (3,25) die bekannte Reihendarstellung der Laguerreschen Polynome (3,26) für $x = \bar{a}$ ist:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (3,26)$$

Dadurch haben wir in der Tat die Nullstellen der Oberfunktion durch ausschließliche Betrachtung im Unterbereich und Verwendung der Asymptotik gefunden.

Wir müssen nun noch das Verhalten der Oberfunktion im Nullpunkt $\bar{p} = 0$ kontrollieren. Wir machen dazu wieder von der Asymptotik (I, 2,14) und (I, 2,15) in Verbindung mit (I, 2,18) Gebrauch, entwickeln also unsere Lösung (3,20) an der Stelle $\bar{p} = \infty$. Bei den gleichen Entwicklungsbedingungen wie vorhin liefert der partikuläre Anteil

$$\varphi = p^{2\alpha} \left\{ \left[1 - \binom{\beta + \alpha}{1} \frac{1}{2\bar{p}} + \dots \right] \left[1 + \binom{\alpha - \beta}{1} \frac{1}{2\bar{p}} \dots \right] \right\} e^{\alpha \bar{p}} \cdot \int \bar{p}^{-2\alpha-3} \left[1 + \binom{\beta - \alpha - 1}{1} \frac{1}{2\bar{p}} + \dots \right] \left[1 - \binom{\beta + \alpha + 1}{1} \frac{1}{2\bar{p}} + \dots \right] e^{-\alpha \bar{p}} d\bar{p}, \quad (3,27)$$

woraus durch partielle Integration folgt:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim \alpha \bar{F}'(0) \bar{p}^{2\alpha} [(1 - \dots)(1 + \dots)] e^{\alpha \bar{p}} \left\{ e^{-\alpha \bar{p}} \left[-\frac{\bar{p}^{-2\alpha-2}}{\alpha} \dots \right] \right\} \\ &\sim -\frac{1}{\bar{p}^2} \bar{F}'(0). \end{aligned} \quad (3,28)$$

Aus dem zweiten Teil von (3,28) heben sich also die e -Funktionen heraus, und wir erhalten eine Entwicklung nach $\frac{1}{\bar{p}}$, die mit einem Glied $\frac{1}{\bar{p}^2}$ beginnt. Hätten wir oben in der Entwicklung für den Integral-Logarithmus die Mascharonische Konstante mitgeführt, so träte hier noch ein Glied mit $e^{+\alpha \bar{p}}$ auf, das man aber in die Lösung der homogenen Gleichung einbeziehen kann, da es dieselbe Abhängigkeit von \bar{p} wie diese zeigt.

Nun kommen wir zur Betrachtung des ersten Teiles von (3,10). Dieses hat für $\bar{p} = \infty$ stets den unendlich großen Faktor $e^{+\alpha \bar{p}}$, es liefert also im Oberbereich keinen vernünftigen Wert für die Oberfunktion, es sei denn, daß $C = 0$ wird. Um also die Bedingung $\bar{F}(0) = 0$ zu erfüllen, muß $C = 0$, bzw. in Verbindung mit der Mascharonischen Konstante vereinigt, $= 0$ gesetzt werden. Damit entnehmen wir mit Hilfe der Asymptotik aus (3,28) für die Entwicklung der Oberfunktion im Nullpunkt $\bar{p} = 0$ oder $\varrho = \bar{a}$ die folgende Entwicklung:

$$\bar{F} = \bar{F}'(0) \cdot \bar{p} + \dots, \quad (3,29)$$

und zwar ist, wie es sein muß, in der Tat die Bedeutung der Konstanten $\bar{F}'(0)$ gleich der Ableitung der Funktion $\bar{F}(0)$ an der Stelle $\bar{p} = 0$. Damit ist das Problem der Nullstellenbestimmung im Unterbereich gelöst.

$$C) \bar{a} \neq 0, \bar{F}(0) \neq 0, (\bar{F}'(0) \neq 0).$$

Es bleibt nur noch der allgemeine Fall zur Betrachtung übrig, bei dem jetzt $\bar{F}(0) \neq 0$, also die allgemeinste Lösung (3,9) und (3,10) zu verwenden ist. Führt man die Betrachtung wieder nur für die sogenannten Eigenwerte, also für β ganzzahlig durch, so hat man auch jetzt von vornherein nur zwei Funktionen zur Verfügung, eine, die im Unendlichen endlich bleibt, eine, die im Unendlichen ∞ wird. Wir wollen erstere bestimmen und erhalten dann als Bedingung für diese eine Beziehung zwischen den noch unbestimmten Koeffizienten $\bar{F}(0)$ und $\bar{F}'(0)$ an Stelle der früheren Bedingung für \bar{a} , weil \bar{a} jetzt beliebig, also keine Nullstelle der Ober-